RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

Przykłady i zadania

Andrzej Palczewski

Spis treści

Przedmowa

Celem tych notatek jest uzupełnienie wykładu równań różniczkowych zwyczajnych o przykłady oraz zadania do samodzielnego rozwiązania przez studentów. Notatki te stanowią dopełnienie skryptu ”Równania Różniczkowe Zwyczajne”. Dlatego też układ materiału jest tu identyczny jak we wspomnianym skrypcie. Notatki te nie zawierają w zasadzie nowego materiału matematycznego. Wszystkie używane pojęcia oraz potrzebne twierdzenia znajdują się w skrypcie ”Równania Różniczkowe Zwyczajne”.

Istotnym nowym elementem w stosunku do klasycznych ćwiczeń z równań różniczkowych zwyczajnych jest szerokie wykorzystanie programu tzw. algebry komputerowej. W środowisku matematycznym niektóre z tych programów, jak *Mathematica* lub *Maple*, zyskały sporą popularność nie tylko do rozwiązywania standardowych zadań studenckich, ale także do prowadzenia własnych prac badawczych. Do rozwiązywania zadań studenckich można używać każdego z dwóch wymienionych wcześniej programów, a także kilku innych programów algebry komputerowej istniejących na rynku (np. *Macsyma*, *Derive*, *Reduce*). W niniejszych notatkach do obliczeń symbolicznych będzie wykorzystywany system *Mathematica* dostępny dla studentów Wydziału MIM. Przykładowe rozwiązania w tych notatkach a także dołączone rysunki powstały w programie *Mathematica* 7.

Rozdział 1

Podstawowe pojęcia

Zadania tego rozdziału mają zapoznać czytelnika z podstawowymi pojęciami równań różniczkowych zwyczajnych: rozwiązaniem równania, krzywymi całkowymi równania, rozwiązaniem szczególnym i ogólnym. Pojęcia te zostaną zilustrowane na prostych przykładach równań skalarnych. Pokazane zostaną także przykłady wykorzystania programu *Mathematica* do rozwiązywania prostych równań.

Zadanie 1.1 Sprawdzić, że funkcja $x(t) = \cos(4t)$ jest rozwiązaniem równania $x'' + 16x = 0$.
Rozwiązanie:
Różniczkując dostajemy $x' = -4\sin(4t)$ oraz $x'' = -16\cos(4t)$. Stąd $x''+16x = -16\cos(4t) + 16\cos(4t) = 0$.

Zadanie 1.2 Sprawdzić, że funkcja $2x^2 + y^2 - 2xy + 5x = 0$ jest rozwiązaniem równania $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-4x-5}{2y-2x}$.
Rozwiązanie:
Obliczając pochodną funkcji uwikłanej $y(x)$ spełniającej równanie $2x^2 + y^2 - 2xy + 5x = 0$ otrzymujemy

$$4x + 2y\frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} - 2y + 5 = 0.$$

Obliczając pochodną $\frac{dy}{dx}$ z tego równania mamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 4x - 5}{2y - 2x},$$

czyli poszukiwane równanie różniczkowe.

Pytanie: Aby równanie $2x^2+y^2-2xy+5x = 0$ definiowało funkcję uwikłaną $y(x)$ musi być spełnione twierdzenie o funkcjach uwikłanych. Na jakim zbiorze zdefiniowana jest funkcja $y(x)$?

Zadanie 1.3 Sprawdzić, że funkcja $x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$ jest rozwiązaniem równania $x'' + x = 0$.

Rozwiązanie:
Różniczkując dostajemy $x' = c_1 \cos t - c_2 \sin t$ oraz $x'' = -c_1 \sin t - c_2 \cos t$. Stąd $x'' + x = -c_1 \sin t - c_2 \cos t + c_1 \sin t + c_2 \cos t = 0$.

Zadanie 1.4 Sprawdzić, że funkcja $x = \frac{t^2}{3} + \frac{1}{t}$ jest rozwiązaniem równania $tx' + x = t^2$ na zbiorze $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
Rozwiązanie:
Różniczkując dostajemy $x' = \frac{2t}{3} - \frac{1}{t^2}$. Podstawiając tę pochodną do równania otrzymujemy $t\frac{2t}{3} - t\frac{1}{t^2} + \frac{t^2}{3} + \frac{1}{t} = t^2$ dla $t \neq 0$.

Zadanie 1.5 Niech $a > 0$. Sprawdzić, że krzywa $x^2 + y^2 = a^2$ jest złożona z krzywych całkowych równania $y' = -\frac{x}{y}$.
Rozwiązanie:
Rozwikłując równanie $x^2 + y^2 = a^2$ dostajemy dwie funkcje

$$y_1(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_2(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Każda z tych funkcji spełnia nasze równanie na przedziale $(-a, a)$, czyli jej wykres jest krzywą całkową tego równania. Te krzywe całkowe nie są dobrze określone w punktach $(-a, 0)$ oraz $(a, 0)$. Można jednak zauważyć, że punkty te należą do krzywych całkowych równania $x' = -\frac{y}{x}$, czyli krzywa $x^2 + y^2 = a^2$ jest w całości krzywą całkową równania $ydy + xdx = 0$.

Do rozwiązania zadań podobnego typu jak powyższe można także wykorzystać program *Mathematica*.

Zadanie 1.6 Sprawdzić, że funkcja $y(x) = ce^{x^2}$ jest rozwiązaniem równania $y' - 2xy = 0$.
Rozwiązanie:
Definiujemy w *Mathematica* naszą funkcję `y[x_] = c*Exp[x^2]` i sprawdzamy, czy spełnia ona wskazane równanie

```
Simplify[y'[x]-2*x*y[x]==0]
```

W wyniku otrzymujemy odpowiedź `True`, co pokazuje, że wskazana funkcja jest rozwiązaniem rozpatrywanego równania.

Zadanie 1.7 Rozwiążemy teraz korzystając z pomocy programu *Mathematica* zadanie 1.3, czyli sprawdzimy, że funkcja $x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$ jest rozwiązaniem równania $x'' + x = 0$.
Rozwiązanie:
Definiujemy w *Mathematica* naszą funkcję `x[t_]=c1*Sin[t]+c2*Cos[t]`, a następnie sprawdzamy, czy spełnia ona wskazane równanie

```
Simplify[x''[t]+x[t]==0]
```

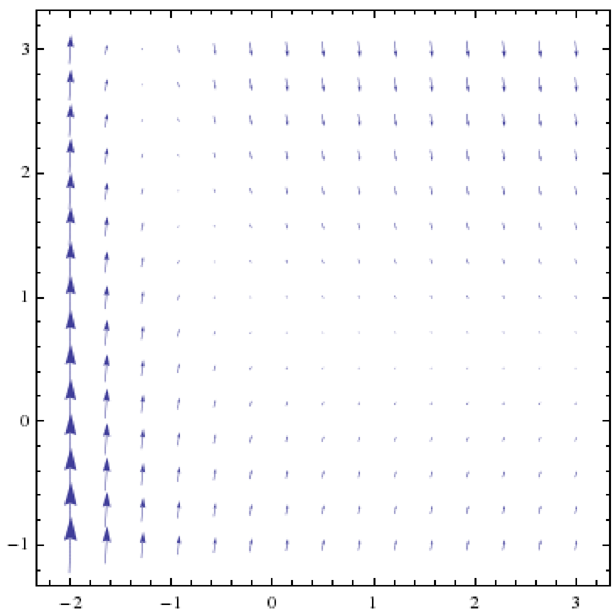
W wyniku otrzymujemy odpowiedź `True`, co pokazuje, że wskazana funkcja jest rozwiązaniem rozpatrywanego równania.

Mathematica jest niezastąpiona przy tworzeniu rysunku pola wektorowego definiowanego za pomocą równania różniczkowego. Tworzenie takich rysunków może w dużym stopniu ułatwić poszukiwanie rozwiązań skomplikowanych równań. Wykorzystanie programu *Mathematica* ilustrują poniższe przykłady.

Zadanie 1.8 Znaleźć pole wektorowe zdefiniowane przez równanie $x' = \frac{3}{2} - 3x + e^{-3t/2}$.
Rozwiązanie:
W programie *Mathematica* rysunek pola wektorowego otrzymujemy korzystając z polecenia `VectorPlot`. Dla naszego równania polecenie to wygląda następująco

```
VectorPlot[{1,3/2-3*x+Exp[-3*t/2]},{t,-2,3},{x,-1,3}]
```

W wyniku otrzymujemy pole wektorowe pokazane na Rys. 1.1

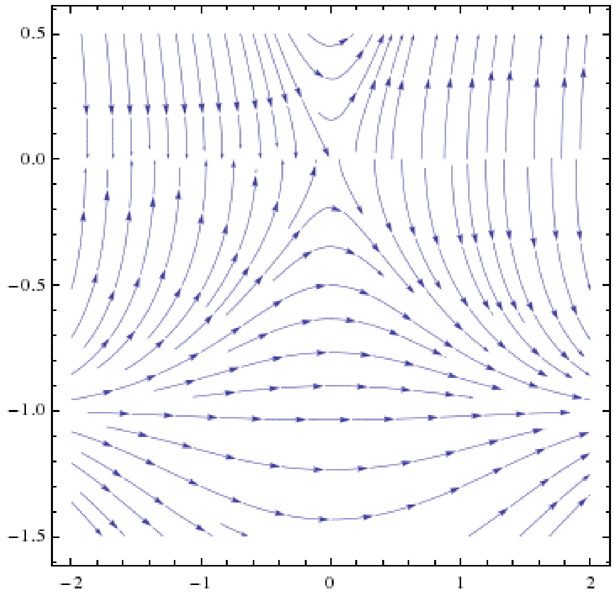


Rysunek 1.1: Pole wektorowe dla równania z Zadania 1.8

Zadanie 1.9 Znaleźć pole wektorowe zdefiniowane przez równanie $\frac{dy}{dx} = x + \frac{x}{y}$, które analizowaliśmy w Przykładzie 1.9 w Skrypcie.
Rozwiązanie:
Dla tego równania pole wektorowe otrzymane poleceniem `VectorPlot` jest mało czytelne. Obok tego polecenia istnieje jeszcze polecenie `StreamPlot`, które generuje wektory pola razem z krzywymi stycznymi do tych wektorów, czyli krzywymi całkowymi równania

```
StreamPlot[{1,x+x/y},{x,-2,2},{y,-1.5,0.5}]
```

W wyniku otrzymujemy pole wektorowe pokazane na Rys. 1.2.



Rysunek 1.2: Pole wektorowe dla równania z Zadania 1.9

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.10 Sprawdzić, czy funkcja $x(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego $tx' + x = \cos t$.

Zadanie 1.11 Znaleźć równanie różniczkowe (możliwie niskiego rzędu), którego rozwiązaniem jest funkcja $t^2 + cx^2 = 2x$.

Zadanie 1.12 Sprawdzić, czy funkcja

$$x(t) = \begin{cases} e^t - 1, & t \geqslant 0, \\ 1 - e^{-t}, & t < 0. \end{cases}$$

jest rozwiązaniem równania różniczkowego $x' = |x|+1$ na całej prostej $(-\infty, \infty)$.

Zadanie 1.13 Niech A będzie rodziną krzywych płaskich opisanych równaniem parametrycznym $\Phi(t, x, a) = 0$, gdzie a jest parametrem. Rodzinę B nazywamy **rodziną krzywych ortogonalnych do krzywych rodziny** A, jeśli krzywe rodziny B przecinają wszystkie krzywe rodziny A pod stałym kątem $\alpha = \pi/2$. Niech $F(t, x, x') = 0$ będzie równaniem krzywych rodziny A. Wykazać, że krzywe rodziny B są opisywane równaniem $F(t, x, -1/x') = 0$.

Zadanie 1.14 Nich c będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Sprawdzić, że funkcja $x(t) = ct + c^2 + 2c + 1$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$x' = \frac{1}{2}\Big(-(t+2) + \sqrt{t^2 + 4t + 4x}\Big). \tag{1.1}$$

Znaleźć przedział na którym podana funkcja spełnia to równanie.

Wykazać, że funkcja $x_1(t) = -\frac{1}{4}t(t+4)$ jest innym rozwiązaniem równania (1.1), które nie może być otrzymane z funkcji $x(t)$ przez dobór stałej c. Znaleźć przedział na którym funkcja x_1 spełnia równanie (1.1).

Zadanie 1.15 Znaleźć kąt między krzywymi całkowymi równań $x' = t + x$ oraz $x' = t - x$ w punkcie $(2, 1)$.

Rozdział 2

Równania skalarne

Zadania w tym rozdziale mają nauczyć rozwiązywania podstawowych skalarnych równań różniczkowych zwyczajnych. Podobnie jak w Skrypcie będziemy się zajmować kolejno: równaniami o rozdzielonych zmiennych, równaniami jednorodnymi, równaniami w postaci różniczek oraz równaniami liniowymi pierwszego rzędu. Jak się okaże, rozwiązywanie kolejnych typów równań będzie polegało na sprowadzeniu ich do równań o rozdzielonych zmiennych.
Uwaga. Przy znajdowaniu rozwiązań wielu równań pojawiają się dowolne stałe. Wszystkie takie stałe będą oznaczane jednym symbolem c. Oznacza to, że w trakcie prowadzonych przekształceń będzie stosowana zasada, że dowolna funkcja od stałej c jest dalej oznaczana symbolem c (c oznacza więc stałą, nie koniecznie tę samą w kolejnych krokach przekształcenia).

2.1 Równania o zmiennych rozdzielonych

Zadanie 2.1 Rozwiązać równanie $xy' = 1 + y^2$.
Rozwiązanie:
To jest równanie o zmiennych rozdzielonych. Jeśli poszukujemy rozwiązania w zbiorze, który nie zawiera punktu $x = 0$, to można je zapisać w postaci (przypadek $x = 0$ redukuje równanie do równania algebraicznego, które nas nie interesuje)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{1 + y^2}.$$

Całkując obie strony dostajemy

$$\ln x = \operatorname{arc\,tg} y + c,$$

co można zapisać w postaci $\ln(cx) = \operatorname{arc\,tg} y$. Po przekształceniu ostatniej równości dostajemy rozwiązanie $y = \operatorname{tg} \ln(cx)$. Rozwiązanie to jest dobrze określone jedynie dla $x > 0$ oraz $c > 0$.

Zadanie 2.2 Znaleźć rozwiązanie równania $y' \sin x = y \ln y$ przechodzące przez punkt: a) $(0, 1)$, b) $(\pi/2, 1)$.
Rozwiązanie:
To jest równanie o zmiennych rozdzielonych. Można je zapisać w postaci

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}.$$

Obliczając całkę z lewej strony otrzymujemy (w trakcie obliczeń robimy podstawienie $z = \ln y$)

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dz}{z} = \ln z = \ln \ln y.$$

Podobnie całkując prawą stronę oraz robiąc podstawienie $\cos x = z$, mamy

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x} = -\int \frac{dz}{1 - z^2} = -\frac{1}{2}\Big(\int \frac{dz}{1 - z} + \int \frac{dz}{1 + z}\Big) = \\ & -\frac{1}{2} \ln \frac{1 + z}{1 - z} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = -\frac{1}{2} \ln \frac{\cos^2 x/2}{\sin^2 x/2} = \\ & -\frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Prowadzi to do następującego rozwiązania badanego równania

$$\ln \ln y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c,$$

czyli

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = c \ln y.$$

Łatwo zauważyć, że przez punkt $(0, 1)$ przechodzi każda krzywa całkowa tego równania. Natomiast dla punktu $(\pi/2, 1)$ mamy $\operatorname{tg} \pi/4 = 1$ oraz $\ln 1 = 0$, czyli nie istnieje stała c, taka że $1 = c \cdot 0$.

Zadanie 2.3 Znaleźć rozwiązanie równania $(2x + 2y - 1)y' + x + y + 1 = 0$.
Rozwiązanie:
Równanie wydaje się nie być równaniem o zmiennych rozdzielonych, ale kiedy wykonamy podstawienie $z = x + y$, to otrzymamy (wykorzystujemy przy tym równość $z' = 1 + y'$)

$$(2z - 1)(z' - 1) + z + 1 = 0.$$

Po uporządkowaniu równanie to ma postać

$$(2z - 1)z' = z - 2,$$

czyli jest równaniem o zmiennych rozdzielonych, co widać z zapisu tego równania w zmienionej postaci

$$\frac{(2z - 1)dz}{z - 2} = dx.$$

Jeśli założymy, że $z \neq 2$, to całkując lewą stronę powyższej równości dostajemy

$$\int \frac{(2z-1)dz}{z-2} = \int \frac{\big((2z-4)+3\big)dz}{z-2} = \int \Big(2+\frac{3}{z-2}\Big)dz = 2z+3\ln|z-2|+c.$$

Daje to rozwiązanie równania $2z + 3\ln|z-2| + c = x$. Po przejściu ponownie do zmiennej y dostajemy rozwiązanie w następującej postaci

$$(x+y-2)^3 = ce^{x+2y}. \tag{2.1}$$

Kiedy $z = 2$, czyli $x + y = 2$, wyjściowe równanie sprowadza się do równania $y' + 1 = 0$. Rozwiązaniem tego równania jest rzeczywiście funkcja $x + y = 2$, której odpowiada rozwiązanie (2.1) ze stałą $c = 0$.

Zadanie 2.4 Światło o natężeniu f_0 pada na ośrodek pochłaniający. Zakładając, że absorpcja światła przez cienką warstwę jest proporcjonalna do grubości tej warstwy Δx i do natężenia promieniowania f na powierzchni warstwy, obliczyć natężenie promieniowania na głębokości x.
Rozwiązanie:
Oznaczmy współczynnik proporcjonalności, o którym mowa w zadaniu, przez k. Niech Δf oznacza spadek natężenia promieniowania w warstwie o grubości Δx. Z treści zadania wynika zależność

$$-\Delta f = kf\Delta x.$$

Zakładając, że funkcja $f = f(x)$ opisująca natężenie promieniowania na głębokości x jest różniczkowalna oraz dokonując przejścia granicznego $\Delta x \to 0$ otrzymujemy równanie różniczkowe

$$-df = kf dx.$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, którego rozwiązanie można zapisać w postaci $\ln f = -kx + c$, czyli $f(x) = ce^{-kx}$. Ponieważ $f(0) = f_0$, to uwzględniając ten warunek początkowy, dostajemy rozwiązanie $f(x) = f_0 e^{-kx}$.

Mathematica nie umie rozwiązywać równań o zmiennych rozdzielonych w ogólnej postaci. Ale sprowadzając równanie do równości dwóch różniczek, można wykorzystać do rozwiązania równania polecenie całkowania funkcji jednej zmiennej, co *Mathematica* wykonuje bardzo sprawnie (nawet dla skomplikowanych funkcji).

Zadanie 2.5 Znaleźć rozwiązanie równania $(x-4)(5y+1)y' + x(y^2+y-2) = 0$.
Rozwiązanie:
Widać, że jest to równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{5y+1}{y^2+y-2}dy = -\frac{x}{x-4}dx.$$

Jego rozwiązanie sprowadza się do policzenia dwóch całek

$$\int \frac{5y+1}{y^2+y-2}dy = -\int \frac{x}{x-4}dx.$$

Całki te można łatwo policzyć w programie *Mathematica*

```
Integrate[(5*y + 1)/((y-1)*(y+2)),y] +
                  Integrate[x/(x-4),x] == c
```

Otrzymujemy wtedy rozwiązanie

```
2 Log[1-y]+3 Log[2+y]+x+4 Log[4-x]==c
```

Po przekształceniach dostajemy rozwiązanie w postaci

$$(x-4)^4(y-1)^2(y+2)^3 = ce^{-x}. \tag{2.2}$$

Zauważmy, że postępowanie to jest dobrze określone tylko dla $x \neq 4$ oraz $y \neq 1$ i $y \neq -2$. Kiedy y jest równe jednej z tych dwóch wartości to wyrażenie y^2+y-2 jest równe zero. Wtedy równanie sprowadza się do równania $y' = 0$. Funkcje stałe $y = 1$ oraz $y = -2$ są rzeczywiście rozwiązaniami tego równania, co odpowiada wzięciu $c = 0$ w rozwiązaniu (2.2). Kiedy $x = 4$ otrzymujemy równanie algebraiczne $y^2 + y - 2 = 0$, którego rozwiązaniami są też funkcje stałe $y = 1$ i $y = -2$.

2.2 Równania jednorodne

Zadanie 2.6 Znaleźć rozwiązanie równania $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$.
Rozwiązanie:
Zakładając, że $x \neq 0$ i dzieląc obie strony równania przez x dostajemy

$$y' = \sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}.$$

Widać więc, że jest to równanie jednorodne. Robiąc podstawienie $y = zx$ dostajemy równanie $xz' + z = \sqrt{1-z^2} + z$. Równanie to sprowadza się do równania o zmiennych rozdzielonych, które jest dobrze określone dla $-1 < z < 1$

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Całkując to równanie dostajemy $\arcsin z = \ln|x| + c$ czyli $\arcsin y/x = \ln c|x|$. To ostatnie rozwiązanie jest poprawnie określone jedynie dla $-x < y < x$.

Zadanie 2.7 Znaleźć krzywą o tej własności, że styczna do niej odcina na osi Ox odcinek równy połowie sumy współrzędnych punktu styczności.
Rozwiązanie:
Zacznijmy od znalezienia równania takiej krzywej. Niech $y(x)$ będzie poszukiwaną krzywą. Wektor styczny do tej krzywej ma współrzędne $(1, y')$. Niech punkt $(z, 0)$ będzie punktem na osi Ox, w którym tę oś przecina styczna do krzywej. Jeśli punkt (x, y) jest punktem, w którym wystawiamy styczną a styczna ta przecina oś Ox w punkcie $(z, 0)$, to rozpatrując trójkat prostokątny OAB, gdzie $O = (x, 0)$, $A = (x, y)$ a $B = (z, 0)$ otrzymujemy zależność $\frac{y}{x-z} = y'$. Ponieważ $z = (x + y)/2$, więc prowadzi to do równania

$$y' = \frac{2y}{x-y}.$$

Równanie to jest dobrze określonym równaniem jednorodnym dla $y \neq x$ (przypadek $y(x) = x$ możemy wykluczyć, bo ta prosta nie spełnia warunków zadania). Robiąc podstawienie $y = ux$ dostajemy

$$u + xu' = \frac{2ux}{x-ux}.$$

Po przekształceniach otrzymujemy równanie

$$xu' = \frac{u+u^2}{1-u}.$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, które można zapisać w postaci

$$\frac{1-u}{u(1+u)}du = \frac{dx}{x}.$$

Całkując lewą stronę tego równania dostajemy

$$\int \frac{1-u}{u(1+u)}du = \int \frac{du}{u} - 2\int \frac{du}{u+1} = \ln u - 2\ln(u+1).$$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie $\frac{u}{(u+1)^2} = cx$. Wracając do zmiennej y otrzymujemy równanie uwikłane poszukiwanej krzywej

$$\frac{y}{(x+y)^2} = c.$$

Aby znaleźć funkcję $y(x)$ w jawnej formie, przepiszmy równanie w postaci funkcji kwadratowej

$$y^2 + (2x - c)y + x^2 = 0$$

Wielomian ten posiada rzeczywiste pierwiastki jeśli $c^2 - 4cx \geqslant 0$. Dla $c > 0$ oznacza to istnienie rozwiązania dla $x \leqslant c/4$, a dla $c < 0$ istnienie rozwiązania dla $x \geqslant c/4$ (przypadek $c = 0$ prowadzi do funkcji $y(x) = 0$, która nie spełnia warunków zadania). Na wyżej zdefiniowanych zbiorach poszukiwana funkcja ma postać

$$y(x) = \frac{c}{2} - x \pm \sqrt{(c/2)^2 - cx}.$$

Zadanie 2.8 Rozwiązać równanie $x^2y' = y^2 + xy - x^2$.
Rozwiązanie:
Poszukujemy rozwiązania w przedziale, który nie zawiera punktu $x = 0$. Równanie jest równaniem jednorodnym. Będziemy poszukiwać rozwiązania przez podstawienie $y = ux$. Nasze równanie sprowadzi się wtedy do postaci $xu' = u^2 - 1$. Aby rozwiązać je metodą rozdzielenia zmiennych musimy założyć, że $u \neq 1$ oraz $u \neq -1$. Zauważmy jednak, że obie te funkcje stałe są rozwiązaniami. Oznacza to, że znaleźliśmy już 2 rozwiązania wyjściowego równania

$$y(x) = x, \qquad y(x) = -x. \tag{2.3}$$

Pozostałe rozwiązania będziemy poszukiwali całkując równanie

$$\frac{du}{u^2 - 1} = \frac{dx}{x}.$$

Obliczając całki z obu stron tego równania dostajemy rozwiązanie w postaci uwikłanej

$$\frac{u-1}{u+1} = cx^2,$$

co daje po rozwikłaniu

$$u = \frac{1 + cx^2}{1 - cx^2}.$$

Ostatecznie rozwiązanie naszego wyjściowego równania składa się z funkcji (2.3) oraz funkcji

$$y(x) = x\frac{1 + cx^2}{1 - cx^2}.$$

Interesujący jest przypadek rozwiązania $y(x) = -x$. Ta funkcja spełnia nasze równanie na całej prostej, a więc także w punkcie $x = 0$, który wykluczyliśmy na początku z przedziału istnienia rozwiązania.

Czytelnika zachęcamy do poszukania ogólnej postaci funkcji, które spełniają równanie oraz są określone na przedziale zawierającym punkt $x = 0$ w swoim wnętrzu.

Zadanie 2.9 Dana jest funkcja ciągła $f(u)$ oraz funkcja $x(t) = c_0 t$ będąca rozwiązaniem równania jednorodnego $x' = f(\frac{x}{t})$. Udowodnić, że:

a) jeśli $f'(c_0) < 1$, to żadne inne rozwiązanie tego równania nie jest styczne do prostej $x = c_0 t$ w początku układu współrzędnych;

b) jeśli $f'(c_0) > 1$, to nieskończenie wiele rozwiązań tego równania jest stycznych do prostej $x = c_0 t$.

Rozwiązanie:
Jeśli $x(t) = c_0 t$, to w szczególności $x'(0) = c_0$. Robiąc podstawienie $tu = x$ otrzymujemy $tu' + u = x'$. Z podstawienia tego wynika, że $x'(0) = u(0) = c_0$.

Równanie $x' = f$ w zmiennej u zapisuje się w postaci $tu' = f(u) - u$. Wynika stąd, że $f(u(0)) = u(0)$, czyli $f(c_0) = c_0$.

Jeśli $u' \not\equiv 0$, to

$$u' = \frac{f(u) - u}{t},$$

więc granica lewostronna

$$u'(0^+)\Big|_{u(0)=c_0} = \frac{f'(u(0)) - 1}{1} = f'(u(0)) - 1.$$

Jeśli $f'(u(0)) = f'(c_0) < 1$, to $u'(0^+) < 0$. Ale $f(c_0) - c_0 = 0$ i $f'(c_0) - 1 < 0$, więc $f(u) - u$ jest funkcją malejącą.

Ponieważ $u(0) = c_0$ a $u'(0^+) < 0$, więc $u(t) < c_0$ dla t w prawostronnym otoczeniu zera. Ponieważ funkcja $f(u) - u$ jest malejąca w otoczeniu c_0, to z faktu $u(t) < c_0$ wynika, że $f(u) - u > 0$ dla t w prawostronnym otoczeniu zera. Z równania $u' = \frac{f(u)-u}{t}$ wynika, że wtedy $u'(t) > 0$, czyli otrzymaliśmy sprzeczność. Oznacza to, że musi być $u'(t) \equiv 0$, czyli $u(t) = c_0$.

Przejdziemy teraz do dowodu faktu b). Całkując równanie dostajemy

$$\int_{c_0}^{u} \frac{dw}{f(w) - w} = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{s}.$$

Niech $G(u)$ będzie funkcją pierwotną dla $\frac{1}{f(u)-u}$. Wtedy możemy zapisać rozwiązanie w postaci uwikłanej $G(u) - G(c_0) = \ln t/t_0$.

Jeśli $f'(u(0)) = f'(c_0) > 1$, to z poprzednich rozważań wynika, że funkcja $f(u) - u$ jest rosnąca. Wynika stąd, że także funkcja $G(u)$ jest rosnąca, czyli możemy zapisać rozwiązanie

$$u(t) = G^{-1}(\ln t/t_0 + G(c_0)).$$

Z tej postaci rozwiązania wynika, że $u(t_0) = c_0$. Ponieważ $f(c_0) - c_0 = 0$ więc z równania $u' = \frac{f(u)-u}{t}$ oraz równości $u(t_0) = c_0$ wynika, że $u'(t_0) = 0$, czyli rozwiązanie jest styczne do prostej $x = c_0 t$ w punkcie $x = c_0 t_0$.

2.3 Równania w postaci różniczek zupełnych

Zadanie 2.10 Dla równania $\big(\sin(xy) + xy\cos(xy)\big)dx + x^2\cos(xy)dy = 0$ znaleźć całkę ogólną.

Rozwiązanie:

Równanie to jest w postaci różniczki zupełnej bo

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\sin(xy) + xy\cos(xy)\big) = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy) = \frac{\partial}{\partial x}x^2\cos(xy).$$

Całkując wyrażenie $\big(\sin(xy)+xy\cos(xy)\big)dx+x^2\cos(xy)dy$ znajdujemy funkcję $F(x,y)=x\sin(xy)+c$. Różniczkując możemy sprawdzić, że

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=\big(\sin(xy)+xy\cos(xy)\big)dx+x^2\cos(xy)dy,$$

czyli funkcja $x\sin(xy)+c=0$ jest całką ogólną naszego równania.

Zadanie 2.11 Znaleźć krzywą całkową równania

$$1+e^{x/y}+e^{x/y}\Big(1-\frac{x}{y}\Big)y'=0$$

przechodzącą przez punkt $(1,1)$.
Rozwiązanie:
Przepiszemy to równanie w postaci różniczek

$$\Big(1+e^{x/y}\Big)dx+e^{x/y}\Big(1-\frac{x}{y}\Big)dy=0$$

Równanie to jest w postaci różniczki zupełnej bo

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(1+e^{x/y}\Big)=-\frac{x}{y^2}e^{x/y}=\frac{\partial}{\partial x}e^{x/y}\Big(1-\frac{x}{y}\Big).$$

Całkując otrzymujemy

$$\int\Big(1+e^{x/y}\Big)dx+\int e^{x/y}\Big(1-\frac{x}{y}\Big)dy=x+ye^{x/y}+c,$$

czyli funkcja $x+ye^{x/y}+c=0$ jest całką ogólną naszego równania. Krzywa całkowa przechodzi przez punkt $(1,1)$, jeśli $c=-1-e$. Oznacza to, że poszukiwaną krzywą całkową jest krzywa $x+ye^{x/y}=1+e$.

Równania różniczkowe rzadko bywają w postaci różniczek zupełnych. Jak wiemy wiele równań, które nie są w postaci różniczek zupełnych można doprowadzić do tej postaci mnożąc równanie przez odpowiedni czynnik całkujący. Poniżej pokażemy kilka zadań, których rozwiązanie wymaga znalezienia czynnika całkującego.

Zadanie 2.12 Znaleźć krzywą całkową równania

$$\Big(\frac{x}{y}+1\Big)dx+\Big(\frac{x}{y}-1\Big)dy=0.$$

Rozwiązanie:
Oznaczmy

$$M=\Big(\frac{x}{y}+1\Big),\quad N=\Big(\frac{x}{y}-1\Big).$$

Mamy $\frac{1}{M}(N_x - M_y) = \frac{1}{y}$. Sugeruje to użycie czynnika całkującego postaci $\mu = \mu(y)$. Prowadzi to do następującego równania dla czynnika całkującego

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{\mu}{M}(N_x - M_y) = \frac{\mu}{y}.$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja $\mu(y) = y$. Mnożąc przez tę funkcję nasze równanie dostajemy

$$(x + y)dx + (x - y)dy = 0.$$

Jest to równanie w postaci różniczki zupełnej. Jego rozwiązaniem jest funkcja $x^2/2 + xy = c$.

Zadanie 2.13 Znaleźć krzywą całkową równania

$$y' = -\frac{x^2 - y}{x^2y^2 + x}$$

przechodzącą przez punkt $(1, 0)$.
Rozwiązanie:
Przepisujemy równanie w postaci różniczek

$$(x^2 - y)dx + (x^2y^2 + x)dy = 0$$

i wprowadzamy standardowe oznaczenia

$$M = x^2 - y, \quad N = x^2y^2 + x.$$

Mamy $\frac{1}{N}(N_x - M_y) = \frac{2}{x}$. Sugeruje to użycie czynnika całkującego postaci $\mu = \mu(x)$. Prowadzi to do następującego równania, jakie spełniać powinien czynnik całkujący

$$\frac{d\mu}{dx} = -\frac{\mu}{N}(N_x - M_y) = -\frac{2\mu}{x}.$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja $\mu(x) = x^{-2}$. Mnożąc przez tę funkcję nasze równanie dostajemy

$$\Big(1 - \frac{y}{x^2}\Big)dx + \Big(y^2 + \frac{1}{x}\Big)dy = 0.$$

Jest to równanie w postaci różniczki zupełnej. Jego rozwiązaniem jest funkcja $x + \frac{1}{3}y^3 + \frac{y}{x} = c$.

Zadanie 2.14 Znaleźć krzywą całkową równania

$$xy^2dx + (x^2y - x)dy = 0.$$

Rozwiązanie:

Niech

$$M = xy^2, \quad N = x^2y - x.$$

Niech μ będzie czynnikiem całkującym zależnym od obu zmiennych. Mamy równanie $xy^2\mu_x - (x^2y - x)\mu_y = \mu(N_x - M_y) = -\mu$. Sugeruje to użycie czynnika całkującego postaci $\mu = \mu(xy)$. Prowadzi to do następującego równania, jakie spełniać powinien czynnik całkujący

$$x^2y^2\mu' - (x^2y^2 - xy)\mu' = -\mu,$$

czyli $xy\mu' = -\mu$. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja $\mu(xy) = (xy)^{-1}$. Mnożąc przez tę funkcję nasze równanie dostajemy

$$ydx + \left(x - \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Jest to równanie w postaci różniczki zupełnej. Jego rozwiązaniem jest funkcja $xy - \ln y = c$.

Zadanie 2.15 Znaleźć krzywą całkową równania

$$(x - xy)dx + (x^2 + y)dy = 0.$$

Rozwiązanie:
Niech

$$M = x - xy, \quad N = x^2 + y.$$

Niech μ będzie czynnikiem całkującym zależnym od obu zmiennych. Mamy równanie $(x-xy)\mu_x-(x^2+y)\mu_y = \mu(N_x-M_y) = 3x\mu$. Sugeruje to użycie czynnika całkującego postaci $\mu = \mu(x^2+y^2)$. Prowadzi to do następującego równania, jakie spełniać powinien czynnik całkujący

$$2x(x - xy)\mu' - 2y(x^2 + y)\mu' = 3x\mu,$$

czyli $-2(x^2+y^2)\mu' = 3\mu$. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja $\mu(x^2+y^2) = (x^2 + y^2)^{-3/2}$. Mnożąc przez tę funkcję nasze równanie dostajemy

$$(x - xy)(x^2 + y^2)^{-3/2}dx + (x^2 + y)(x^2 + y^2)^{-3/2}dy = 0.$$

Jest to równanie w postaci różniczki zupełnej. Jego rozwiązaniem jest funkcja $(x^2 + y^2) = c(y - 1)^2$.

Mathematica może być wykorzystana do znajdowania rozwiązań równań w postaci różniczek zupełnych, ponieważ znalezienie rozwiązania dla takich równań sprowadza się do wykonania dwóch całkowań.

Zadanie 2.16 Rozwiązać w programie *Mathematica* równanie

$$(x + y)dx + (x - y)dy = 0.$$

Rozwiązanie:
Rozpoczniemy od zdefiniowania odpowiednich funkcji

```
MC[x_,y_] = x+y;
NC[x_,y_] = x-y;
```

Sprawdzamy, czy nasze równanie jest w postaci różniczki zupełnej

```
Simplify[D[MC[x,y],y] == D[NC[x,y],x]]
```

Dostajemy odpowiedź `True`, czyli rzeczywiście równanie jest w postaci różniczki zupełnej. Aby znaleźć rozwiązanie musimy dokonać odpowiedniego całkowania.

```
{p1,p2} = {1,1};
f[X_,Y_] = Integrate[MC[x,p2],{x,p1,X}]+
           Integrate[NC[X,y],{y,p2,Y}]
```

Dostajemy wtedy wynik $X^2/2 + XY - Y^2/2 - 1$.

2.4 Skalarne równania liniowe

Zadanie 2.17 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $xy' + 2y = 3x$.
Rozwiązanie:
Równanie jest równaniem liniowym dobrze określonym na przedziale, który nie zawiera punktu $x = 0$.

Poszukiwanie rozwiązania zaczynamy od rozwiązania równania jednorodnego $xy' + 2y = 0$. Równanie to jest równaniem o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2dx}{x}.$$

Jego rozwiązaniem jest funkcja $y(x) = \frac{c}{x^2}$.

Poszukujemy teraz rozwiązania równania niejednorodnego metodą uzmienniania stałej, tj. postulujemy istnienie rozwiązania w postaci $y(x) = \frac{z(x)}{x^2}$. Wstawiając tę funkcję do równania niejednorodnego otrzymujemy

$$\frac{z'}{x} - 2\frac{z}{x^2} + 2\frac{z}{x^2} = 3x.$$

Po uproszczeniu dostajemy równanie $z' = 3x^2$, którego rozwiązaniem jest funkcja $z(x) = x^3 + c$. Wynika stąd, że rozwiązaniem ogólnym naszego równania jest funkcja

$$y(x) = x + \frac{c}{x^2}.$$

Zadanie 2.18 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $y' \sin x - y = 1 - \cos x$.
Rozwiązanie:
Równanie jest równaniem liniowym dobrze określonym na przedziale, który nie zawiera punktów $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Poszukiwanie rozwiązania zaczynamy od rozwiązania równania jednorodnego $y' \sin x - y = 0$. Równanie to jest równaniem o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sin x}.$$

Jego rozwiązaniem jest funkcja $y(x) = c \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Poszukujemy teraz rozwiązania równania niejednorodnego metodą uzmienniania stałej, tj. postulujemy istnienie rozwiązania w postaci $y(x) = z(x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Wstawiając tę funkcję do równania niejednorodnego otrzymujemy

$$\left(z' \operatorname{tg} \frac{x}{2} + z \frac{1}{2\cos^2 x/2}\right) \sin x - z \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 - \cos x.$$

Po uproszczeniu dostajemy równanie $z' = \frac{1-\cos x}{2\sin^2 x/2}$, którego rozwiązaniem jest funkcja $z(x) = x + c$. Wynika stąd, że rozwiązaniem ogólnym naszego równania jest funkcja

$$y(x) = (x + c) \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Zadanie 2.19 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $dx + (x + y^2)dy = 0$.
Rozwiązanie:
Równanie jest równaniem liniowym, jeśli zapisać je w postaci $x' + x + y^2 = 0$.

Poszukiwanie rozwiązania zaczynamy od rozwiązania równania jednorodnego $x' + x = 0$. Równanie to jest równaniem o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dx}{x} = -dy.$$

Jego rozwiązaniem jest funkcja $x(y) = ce^{-y}$.

Poszukujemy teraz rozwiązania równania niejednorodnego metodą uzmienniania stałej, tj. postulujemy istnienie rozwiązania w postaci $x(y) = z(y)e^{-y}$. Wstawiając tę funkcję do równania niejednorodnego otrzymujemy

$$z'e^{-y} - ze^{-y} + ze^{-y} + y^2 = 0$$

Po uproszczeniu dostajemy równanie $z' = -y^2e^y$, którego rozwiązaniem jest funkcja $z(y) = -\int y^2e^y dy$. Występującą w ostatnim wyrażeniu całkę liczymy przez części (dwukrotnie)

$$-\int y^2e^y dy = -y^2e^y + 2\int ye^y dy = -y^2e^y + 2ye^y - 2\int e^y dy =$$
$$-y^2e^y + 2ye^y - 2e^y + c.$$

Stąd $z(y) = -y^2e^y + 2ye^y - 2e^y + c$. Rozwiązaniem ogólnym naszego równania jest więc funkcja

$$x(y) = -y^2 + 2y - 2 + ce^{-y}.$$

Zadanie 2.20 Ciało o masie m opada swobodnie w ośrodku stawiającym opór. Siła oporu jest proporcjonalna do prędkości opadania. Znaleźć wzór na prędkość opadania oraz przebytą drogę.
Rozwiązanie:
Zgodnie z II prawem dynamiki Newtona opadanie ciała opisywane jest równaniem

$$m\frac{dv}{dt} = mg - av,$$

gdzie g – stała grawitacyjna, a – współczynnik proporcjonalności siły oporu. Równanie to jest równaniem liniowym.

Poszukiwanie rozwiązania zaczynamy od rozwiązania równania jednorodnego $m\frac{dv}{dt} = -av$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{a}{m}dt.$$

Jego rozwiązaniem jest funkcja $v(t) = ce^{-at/m}$.

Poszukujemy teraz rozwiązania równania niejednorodnego metodą uzmienniania stałej, tj. postulujemy istnienie rozwiązania w postaci $v(t) = z(t)e^{-at/m}$. Wstawiając tę funkcję do równania niejednorodnego otrzymujemy

$$z'e^{-at/m} - z\frac{a}{m}e^{-at/m} = g - z\frac{a}{m}e^{-at/m}.$$

Po uproszczeniu dostajemy równanie $z' = ge^{-at/m}$, którego rozwiązaniem jest funkcja $z(t) = \frac{mg}{a}e^{at/m} + c$.

Rozwiązaniem ogólnym naszego równania jest więc funkcja

$$v(t) = \frac{mg}{a} + ce^{-at/m}.$$

Jeśli w chwili początkowej opadające ciało miało prędkość początkową v_0, to $c = v_0 - \frac{mg}{a}$ i rozwiązanie przyjmuje postać

$$v(t) = \frac{mg}{a}\left(1 - e^{-at/m}\right) + v_0e^{-at/m}.$$

Korzystając z tego ostatniego wzoru możemy policzyć drogę jaką przebyło opadające ciało

$$S(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau.$$

Obliczając tę całkę otrzymujemy

$$S(t) = \int_0^t \frac{mg}{a}\left(1 - e^{-a\tau/m}\right) + v_0e^{-a\tau/m}d\tau =$$
$$\frac{m}{a}\left(v_0 - \frac{mg}{a}\right)\left(1 - e^{-at/m}\right) + \frac{mg}{a}t.$$

Zadanie 2.21 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $y' - y = xy^2$.
Rozwiązanie:
Równanie nie jest równaniem liniowym, ale jest równaniem Bernoulliego z wykładnikiem Bernoulliego 2. Dzieląc to równanie przez y^2 oraz wprowadzając nową zmienną zależną $u = y^{-1}$ dostajemy równanie $-u' - u = x$. Jest to równanie liniowe. Rozwiązanie równania jednorodnego ma postać $u(x) = ce^{-x}$. Rozwiązania równania niejednorodnego szukamy w postaci $u(x) = z(x)e^{-x}$. Wstawiając to wyrażenie do równania otrzymujemy $z' = -xe^x$. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja $z(x) = -xe^x + e^x + c$. Wynika stąd następująca postać rozwiązania $u(x) = -x + 1 + ce^{-x}$, czyli

$$y(x) = \frac{e^x}{(1-x)e^x + c}.$$

Zadanie 2.22 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $xy' + y = y^2 \ln x$.
Rozwiązanie:
Równanie nie jest równaniem liniowym, ale jest równaniem Bernoulliego z wykładnikiem Bernoulliego 2. Dzieląc to równanie przez y^2 oraz wprowadzając nową zmienną zależną $u = y^{-1}$ dostajemy równanie $-xu' + u = \ln x$. Jest to równanie liniowe. Rozwiązanie równania jednorodnego ma postać $u(x) = cx$. Rozwiązania równania niejednorodnego szukamy w postaci $u(x) = z(x)x$. Wstawiając to wyrażenie do równania otrzymujemy $-x^2 z' = \ln x$. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja $z(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2} dx$. Tę całkę przekształcamy przez podstawienie $\ln x = t$ a następnie liczymy przez części

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \frac{t}{e^t} dt = \int te^{-t} dt = -te^{-t} - e^{-t} + c = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c.$$

Wynika stąd następująca postać rozwiązania $z(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c$. Po podstawieniu otrzymujemy $u(x) = \ln x + cx + 1$, co daje następujące rozwiązanie ogólne wyjściowego równania

$$y(x) = \big(\ln x + cx + 1\big)^{-1}.$$

Mathematica ma wbudowane polecenie do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. Jest to polecenie `DSolve`, które ma następującą składnię `DSolve[de[x,y],y[x],x]`, gdzie `de[x,y]` jest zapisem równania, `y[x]` – zmienną zależną a `x` – zmienną niezależną. Dotychczas nie używaliśmy tego polecenia, bo rozpatrywane równania nie mogły być rozwiązane za jego pomocą. Inaczej wyglada sytuacja dla równań liniowych, które *Mathematica* umie rozwiązać (jeśli tylko odpowiednie całki są obliczalne analitycznie).

Zadanie 2.23 Rozwiązać w programie *Mathematica* równanie $y' - 4y = 0$.
Rozwiązanie:
To proste równanie posłuży nam do zilustrowania działania polecenia `DSolve`. Zaczynamy od definicji równania

```
de[x_,y_] = (y'[x] - 4*y[x] == 0);
```

Wykonując polecenie

```
DSolve[de[x,y], y[x], x]
```

dostaniemy wynik
{{y[x] -> $e^{4\ x}$C[1]}}

Te 2 dodatkowe nawiasy klamrowe, które pojawiły się w tym zapisie wynikają z faktu, że DSolve tworzy reguły (*Solution Rules*) tworzenia rozwiązania. Tych reguł może być wiele, stąd zapis jak dla zbioru. Można wyeliminować te dodatkowe nawiasy klamrowe znajdując najpierw reguły a potem wyznaczając rozwiązanie z tych reguł, jak pokazuje poniższy przykład

```
SolRule = DSolve[de[x,y], y[x], x];
y1[x_] = Simplify[y[x]/.SolRule[[1]]]
```

Wtedy dostaniemy odpowiedź
$e^{4\ x}$C[1]

Zadanie 2.24 Rozwiązać w programie *Mathematica* równanie $xy' - 4y = x^7e^x$.
Rozwiązanie:
Zaczynamy od definicji równania

```
de[x_,y_] = (x*y'[x] - 4*y[x] == x^7*Exp[x]);
```

Wykonując polecenie

```
DSolve[de[x,y], y[x], x]
```

dostaniemy wynik
{{y[x] -> $e^x x^4$ (2 - 2 x + x^2) + x^4 C[1]}}

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 2.25 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x' = \dfrac{x-1}{t+1}$.

Zadanie 2.26 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x' = e^{t-x}$.

Zadanie 2.27 Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

Zadanie 2.28 Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego $xdy - ydx = 0$, $y(1) = 0$.

Zadanie 2.29 Rozwiązać równanie $(a^2+y^2)dx + 2x\sqrt{ax-x^2}dy = 0$ dokonując odpowiedniego podstawienia.

Zadanie 2.30 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0.$

Zadanie 2.31 Rozwiązać równanie $\left(\dfrac{x}{y}+1\right)dx+\left(\dfrac{x}{y}-1\right)dy = 0$ metodą czynnika całkującego.

Zadanie 2.32 Spadochroniarz wyskoczył na wysokości $h_1 = 1000$ m i rozłożył spadochron na wysokości $h_2 = 400$ m. Wiadomo, że graniczna prędkość spadania człowieka w powietrzu wynosi $v = 50$ m/s, a siła oporu powietrza przy spadaniu jest proporcjonalna do kwadratu prędkości spadania. Obliczyć na tej podstawie, ile czasu spadał spadochroniarz do chwili rozwinięcia spadochronu.

Zadanie 2.33 Znaleźć krzywą o tej własności, że trójkąt utworzony przez oś Oy, styczną do krzywej oraz promień wodzący w punkcie styczności jest trójkątem równoramiennym.

Zadanie 2.34 W celu zatrzymania statków na przystani rzuca się z nich cumy (liny), które kilkakrotnie są owijane wokół pachołków (okrągłych słupów) stojących na przystani. Jaka będzie siła hamująca statek, jeśli cuma została trzykrotnie owinięta wokół pachołka, współczynnik tarcia cumy o pachołek $k = \frac{1}{3}$, a robotnik portowy ciągnie dodatkowo cumę z siłą $F = 150$ N?

Zadanie 2.35 Niech μ_1 i μ_2 będą czynnikami całkującymi równania $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ oraz funkcje μ_1 i μ_2 nie są proporcjonalne do siebie. Udowodnić, że funkcja $\frac{\mu_1}{\mu_2} = c$ jest całką ogólną tego równania.

Zadanie 2.36 Ciało o masie m umocowane na gumie spada w polu grawitacyjnym Ziemi w ośrodku, w którym tarcie jest proporcjonalne do prędkości. Zakładamy, że opór jaki stawia guma jest proporcjonalny do przebytej przez ciało drogi. Wiedząc, że ciało spada w czasie T z wysokości L, a w czasie $2T$ z wysokości L_1, obliczyć współczynnik tarcia f oraz współczynnik oporu gumy k.

Rozdział 3

Podstawowe twierdzenia

W rozdziale tym będziemy rozwiązywali zadania, które mają służyć jako ilustracje dla najważniejszych twierdzeń: o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań, o zależności rozwiązania od warunków początkowych i parametrów oraz o przedłużalności rozwiązań.

3.1 Istnienie i jednoznaczność rozwiązań lokalnych

Zadanie 3.1 Dane jest zagadnienie Cauchy'ego

$$x' = f(t, x), \quad x(0) = x_0,$$

z funkcją

$$f(t, x) = \begin{cases} -1, & t < 0, x \in \mathbb{R}, \\ 1, & t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Znaleźć rozwiązanie tego zagadnienia Cauchy'ego w otoczeniu zera.
Rozwiązanie:
Niech $\Delta = (-\delta, \delta)$ dla $\delta > 0$. Pokażemy, że na przedziale Δ nie istnieje rozwiązanie naszego równania przy dowolnym $x_0 \in \mathbb{R}$, tj. nie istnieje funkcja klasy $C^1(\Delta)$, która jest rozwiązaniem. Gdyby bowiem istniało rozwiązanie $x(t)$, to dla dostatecznie małego α, $0 < \alpha < \delta$, byłoby $x'(t) = -1$ dla $-\alpha < t < 0$ oraz $x'(t) = 1$ dla $\alpha > t \geqslant 0$. Oznacza to, że w punkcie $t = 0$ pochodna $x'(t)$ musiałaby być nieciągła.

Zadanie 3.2 Rozważmy na przedziale (a, b) równanie

$$y' = f(x).$$

Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła na tym przedziale, to równanie posiada jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnego warunku początkowego $y_0 = y(x_0)$, dla $x_0 \in (a, b)$. Załóżmy, że funkcja $f(x) \to +\infty$, gdy $x \to c$, gdzie $c \in (a, b)$, ale jest ciągła na przedziałach (a, c) i (c, b). Przedyskutować dla tego przypadku problem istnienia i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego.

Rozwiązanie:
Rozważmy przypadek, gdy $x_0 \in (a, c)$. Rozwiązanie może być zapisane w postaci całkowej

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Jeśli całka $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ jest rozbieżna przy $x \to c$, to rozwiązanie dane tą całką przedłuża się na cały przedział (a, c), ale przy $x \to c^-$ rozwiązanie rozbiega do $+\infty$.

Jeśli warunek początkowy jest z drugiej strony punktu c, czyli $x_0 \in (c, b)$, to rozwiązanie można przedłużyć w lewo na cały przedział (c, b). Rozwiązanie to rozbiega do $-\infty$ dla $x \to c^+$. Otrzymujemy więc jednoznaczne rozwiązania na przedziale (a, c) lub (c, b) zależnie od tego po której stronie punktu c leży warunek początkowy x_0.

Jeśli całka $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ jest zbieżna przy $x \to c$, to rozwiązanie dane tą całką z warunkiem początkowym $x_0 \in (a, c)$ przedłuża się na cały przedział (a, c), a przy $x \to c^-$ rozwiązanie zbiega do $\int_{x_0}^{c} f(t)dt$. Jednocześnie $y'(x) \to +\infty$ dla $x \to c^-$, czyli rozwiązanie jest styczne do prostej $x = c$. Podobnie widać, że jeśli $x_0 \in (c, b)$, to rozwiązanie można przedłużyć w lewo na cały przedział (c, b). Rozwiązanie to zbiega do $\int_{c}^{x_0} f(t)dt$ dla $x \to c^+$ a $y'(x) \to +\infty$ dla $x \to c^+$, czyli rozwiązanie jest też styczne do prostej $x = c$. Oznacza to, że biorąc dowolne rozwiązanie po lewej stronie punktu $x = c$ można je przedłużyc dowolnym rozwiązaniem po prawej stronie punktu $x = c$. Oznacza to brak jednoznaczności rozwiązania.

Zadanie 3.3 Rozważmy dla $y \in (a, b)$ równanie

$$y' = f(y).$$

Przedyskutować problem istnienia i jednoznaczności rozwiązania tego zagadnienia początkowego, jeśli funkcja $f(y)$ jest ciągła na tym przedziale, ale zeruje się w pewnym punkcie $c \in (a, b)$.

Rozwiązanie:
Rozwiązanie tego zadania sprowadza się do zadania 3.2. W tym celu należy zauważyć, że jest to równanie o zmiennych rozdzielonych i znalezienie rozwiązania sprowadza się do policzenia całki

$$x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{f(t)}.$$

Jeśli funkcja $f(y)$ zeruje się w punkcie wewnętrznym c odcinka (a, b), to całka $\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{f(t)}$ jest całką niewłaściwą dla $y \to c$. Zachowanie rozwiązania wynika wtedy bezpośrednio z dyskusji przeprowadzonej dla zadania 3.2. Wyróżnić możemy następujące przypadki:

1. Jeśli całka $\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{f(t)}$ jest rozbieżna dla $y \to c^+$ i $y \to c^-$, to przez każdy punkt (x, y), $x \in \mathbb{R}$, $y \in (a, b)$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa naszego równania. Prosta $y = c$ jest także krzywą całkową równania, a pozostałe krzywe całkowe asymptotycznie zbliżają się do tej prostej z góry lub z dołu zależnie od warunku początkowego.
2. Jeśli całka $\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{f(t)}$ jest zbieżna dla $y \to c^+$ i $y \to c^-$, a przy przejściu przez punkt c funkcja $f(y)$ nie zmienia znaku, to przez każdy punkt (x, y), $x \in \mathbb{R}$, $y \in (a, b)$ przechodzi nieskończenie wiele krzywych całkowych równania.
3. Jeśli całka $\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{f(t)}$ jest zbieżna dla $y \to c^+$ i $y \to c^-$, a przy przejściu przez punkt c funkcja $f(y)$ zmienia znak, to przez każdy punkt prostej $y = c$ przechodzi nieskończenie wiele krzywych całkowych równania, a przez każdy punkt (x, y), $x \in \mathbb{R}$, $y \in (a, c) \cup (c, b)$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania.

Zadanie 3.4 Udowodnimy kryterium jednoznaczności rozwiązania zwane kryterium Osgooda.

Twierdzenie Osgooda.

Niech funkcja $f(t, x)$ *będzie ciągła w zbiorze* $Q = \{(t, x)\colon\ |t - t_0| \leqslant a, |x - x_0| \leqslant b\}$ *i dla dowolnej pary punktów* (t, x_1), (t, x_2) *z tego zbioru spełnia warunek*

$$|f(t, x_2) - f(t, x_1)| \leqslant \phi(|x_2 - x_1|),$$

gdzie dla $0 < u \leqslant 2b$ *funkcja* $\phi(u) > 0$, *jest ciągła oraz*

$$\int_{\varepsilon}^{2b} \frac{du}{\phi(u)} \to \infty \quad \textit{dla } \varepsilon \to 0.$$

Wtedy przez każdy punkt (t_0, x_0) *zbioru* Q *przechodzi co najwyżej jedna krzywa całkowa równania*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{3.1}$$

Rozwiązanie:

Załóżmy, że istnieją dwa różne rozwiązania równania (3.1) $x_1(t)$ i $x_2(t)$ z tym samym warunkiem początkowym $x_1(t_0) = x_2(t_0) = x_0$. Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy, że $t_0 = 0$. Niech $y(t) = x_2(t) - x_1(t)$. Ponieważ z założenia $x_1(t) \not\equiv x_2(t)$, to istnieje taki punkt t_1, że $y(t_1) \neq 0$. Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że $y(t_1) > 0$ (zawsze możemy zamienić porządek funkcji x_1 i x_2 w definicji $y(t)$). Możemy także przyjąć, że $t_1 > 0$. Korzystając z założeń twierdzenia dostajemy nierówność różniczkową

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(x_2 - x_1)}{dt} = f(t, x_2) - f(t, x_1) \leqslant \phi(|x_2 - x_1|) < 2\phi(|x_2 - x_1|).$$

Rozważmy teraz równanie

$$\frac{dz}{dt} = 2\phi(z) \tag{3.2}$$

z warunkiem początkowym $z(t_1) = y(t_1) = y_1$. To zagadnienie Cauchy'ego posiada jednoznaczne rozwiązanie, co wynika z założeń twierdzenia oraz zadania 3.3. Z zadania 3.3 wynika, że rozwiązanie to jest dodatnie i asymptotycznie zbliża się do osi Ot, ale nigdy tej osi nie przetnie.

W punkcie t_1 krzywe $z(t)$ oraz $y(t)$ przecinają się. Ponieważ jednocześnie $y'(t_1) < 2\phi(y_1) = 2\phi(z(t_1)) = z'(t_1)$, więc na odcinku $(t_1 - \varepsilon, t_1)$ mamy nierówność $y(t) > z(t)$, dla pewnego $\varepsilon > 0$.

Zauważmy, że przedział ten możemy rozszerzyć w lewo aż do zera. Rzeczywiście, gdyby w przedziale $(0, t_1)$ istniał punkt t_2, taki że $y(t_2) = z(t_2)$, to w tym punkcie miałaby miejsce nierówność $y'(t_2) \geqslant z'(t_2)$, ponieważ na prawo od tego punktu mamy nierówność $y(t) > z(t)$. Ponieważ $z'(t_2) = 2\phi(z(t_2))$ a $\phi(z(t_2)) = \phi(y(t_2))$, więc wynika stąd nierówność $y'(t_2) \geqslant 2\phi(y(t_2))$, która jest sprzeczna z oszacowaniem (3.2). Pokazaliśmy więc, że na całym przedziale $(0, t_1)$ mamy nierówność $y(t) \geqslant z(t)$. Ponieważ z konstrukcji rozwiązania $z(t)$ wynika, że $z(t) > 0$, więc także $y(t) > 0$ dla $t \in [0, t_1]$, w szczególności $y(0) > 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że istnieją dwie różne krzywe całkowe naszego równania z tym samym warunkiem początkowym.

Zadanie 3.5 Dane jest równanie $x' = x^2$ z warunkiem początkowym $x(0) = 1$. Znaleźć maksymalny przedział istnienia rozwiązania tego równania oraz odpowiednie rozwiązanie wysycone.

Rozwiązanie:

Ponieważ rozpatrywane równanie jest równaniem o zmiennych rozdzielonych możemy je łatwo scałkować.

Rozwiązanie ogólne ma postać $x(t) = \frac{1}{c-t}$. Dla warunku początkowego $x(0) = 1$ dostajemy rozwiązanie $x(t) = \frac{1}{1-t}$. Rozwiązanie to jest dobrze określone na przedziale $(-\infty, 1)$. Powstaje pytanie, czy rozwiązanie to jest rozwiązaniem wysyconym, czy też można je jeszcze przedłużyć. Interesujący jest tylko przypadek prawego końca przedziału, czyli pytanie czy rozwiązanie można przedłużyć poza punkt $t = 1$. Przeanalizujmy zachowanie się rozwiązania gdy $t \to 1^-$. Jak łatwo zauważyć wtedy $x(t) \to +\infty$. Zgodnie z odpowiednim twierdzeniem wynika stąd, że rozwiązania nie można przedłużyć poza przedział $(-\infty, 1)$.

Pokażemy teraz jak *Mathematica* daje sobie radę z brakiem jednoznaczności.

Zadanie 3.6 Rozwiązać w programie *Mathematica* zagadnienie Cauchy'ego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \quad y(0) = 0.$$

Rozwiązanie:

Odpowiednie polecenie wygląda następująco

```
DSolve[{y'[x]==x/y[x],y[0]==0},y[x],x]
```

Otrzymujemy wtedy rozwiązanie
`{{y[x] ->`$\sqrt{\texttt{x}^2}$`},{y[x]-> -`$\sqrt{\texttt{x}^2}$`}}`
Możemy sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że te dwie funkcje są rozwiązaniami wskazanego zagadnienia początkowego. Otrzymane dwa rozwiązania nie przeczą twierdzeniu o jednoznaczności rozwiązań, ponieważ poszukujemy rozwiązania przechodzącego przez punkt $(0, 0)$, a tym punkcie prawa strona równania nie jest ciągła (nie jest ona nawet dobrze określona w tym punkcie).

3.2 Zależność rozwiązania od danych początkowych i parametrów

Zadanie 3.7 Dane jest zagadnienie Cauchy'ego

$$x' = \sin(\mu t), \quad x(t_0) = x_0,$$

gdzie μ jest parametrem. Należy znaleźć pochodną $\dfrac{\partial x}{\partial \mu}$.

Rozwiązanie:
Ponieważ równanie jest równaniem o zmiennych rozdzielonych możemy znaleźć rozwiązanie równania a następnie policzyć pochodną po μ.

Niech $x = \phi(t, \mu)$ będzie rozwiązaniem równania. Wtedy $\phi(t_0, \mu) = x_0$ i całkując równanie dostajemy

$$\phi(t, \mu) = -\frac{1}{\mu}\cos(\mu t) + c(\mu).$$

Problemem jest oczywiście wyznaczenie funkcji $c(\mu)$. Jeśli jednak zróżniczkujemy rozwiązanie po μ, to otrzymamy

$$\frac{\partial \phi(t, \mu)}{\partial \mu} = \frac{t \sin(\mu t)}{\mu} + \frac{\cos(\mu t)}{\mu^2} + \frac{dc}{d\mu}.$$

Z warunku $\dfrac{\partial \phi(t_0, \mu)}{\partial \mu} = 0$ wynika

$$\frac{dc}{d\mu} = -\left(\frac{t_0 \sin(\mu t_0)}{\mu} + \frac{\cos(\mu t_0)}{\mu^2}\right),$$

czyli

$$\frac{\partial \phi(t, \mu)}{\partial \mu} = \frac{t \sin(\mu t)}{\mu} + \frac{\cos(\mu t)}{\mu^2} - \frac{t_0 \sin(\mu t_0)}{\mu} - \frac{\cos(\mu t_0)}{\mu^2}.$$

Przedstawiona wyżej metoda znajdowania pochodnej rozwiązanie po parametrze wykorzystywała fakt, że można było znaleźć analityczne rozwiązanie równania. Pokażemy teraz jak działa standardowa metoda znajdowania pochodnej po parametrze. Zgodnie z teorią pochodna $y(t) = \dfrac{\partial x(t, \mu)}{\partial \mu}$ spełnia równanie

$$y' = t\cos(\mu t), \quad y(t_0) = 0.$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$y(t) = \frac{t\sin(\mu t)}{\mu} + \frac{\cos(\mu t)}{\mu^2} + c.$$

Wyznaczając c z warunku $y(t_0) = 0$ dostajemy wyrażenie identyczne jak metodą bezpośredniego różniczkowania rozwiązania równania

$$y(t) = \frac{t\sin(\mu t)}{\mu} + \frac{\cos(\mu t)}{\mu^2} - \frac{t_0\sin(\mu t_0)}{\mu} - \frac{\cos(\mu t_0)}{\mu^2}.$$

Zadanie 3.8 Dane jest zagadnienie Cauchy'ego

$$x' = \mu t + x, \quad x(0) = 1,$$

gdzie μ jest parametrem. Należy znaleźć pochodną $\frac{\partial x}{\partial \mu}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ równanie jest równaniem liniowym możemy znaleźć rozwiązanie równania a następnie policzyć pochodną po μ.

Niech $x = \phi(t,\mu)$ będzie rozwiązaniem równania. Całkując równanie dostajemy

$$\phi(t,\mu) = -\mu t - \mu + c(\mu)e^t.$$

Różniczkując rozwiązanie po μ otrzymamy

$$\frac{\partial\phi(t,\mu)}{\partial\mu} = -t - 1 + \frac{dc}{d\mu}e^t.$$

Wyznaczamy $\frac{dc}{d\mu}$ z warunku $\frac{\partial\phi(0,\mu)}{\partial\mu} = 0$, który wynika z warunku początkowego $\phi(0,\mu) = 1$. Otrzymujemy wtedy

$$\frac{dc}{d\mu} = 1.$$

Daje to poszukiwaną pochodną

$$\frac{\partial\phi(t,\mu)}{\partial\mu} = -t - 1 + e^t.$$

Zadanie 3.9 Dane jest zagadnienie Cauchy'ego

$$x' = x + \mu(t + x^2), \quad x(0) = 1,$$

gdzie μ jest parametrem. Należy znaleźć pochodną $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

Rozwiązanie:

Niech $y = \dfrac{\partial x}{\partial \mu}$. Funkcja $y(t)$ spełnia równanie

$$y' = (1 + 2\mu x)y + t + x^2, \quad y(0) = 0.$$

Równanie to rozwiązujemy standardową metodą dla równań liniowych. Najpierw znajdujemy rozwiązanie równania jednorodnego

$$y(t) = c \exp\Big(\int_0^t (1 + 2\mu x) ds\Big),$$

a następnie uzmienniamy stałą otrzymując (korzystamy z warunku początkowego $y(0) = 0$)

$$c(t) = \int_0^t \exp\Big(-\int_0^s (1 + 2\mu x) d\tau\Big)(s + x^2) ds.$$

Stąd

$$y(t) = \int_0^t \exp\Big(\int_s^t (1 + 2\mu x) d\tau\Big)(s + x^2) ds.$$

Zauważmy, że dla $\mu = 0$ równanie wyjściowe ma rozwiązanie $x(t) = e^t$. Wykorzystując to rozwiązanie dostajemy po przejściu granicznym

$$y(t)\Big|_{\mu=0} = \int_0^t \exp\Big(\int_s^t d\tau\Big)(s + e^{2s}) ds = \int_0^t (s + e^{2s}) e^{t-s} ds.$$

Obliczając ostatnią całkę przez części otrzymujemy

$$y(t)\Big|_{\mu=0} = -t - 1 + e^{2t}.$$

Zadanie 3.10 Dane jest zagadnienie Cauchy'ego

$$x' = x + x^2 + tx^3, \quad x(2) = x_0.$$

Należy znaleźć pochodną względem warunku początkowego $\dfrac{\partial x}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0}$.

Rozwiązanie:

Niech $z = \dfrac{\partial x}{\partial x_0}$. Funkcja $z(t)$ spełnia równanie

$$z' = (1 + 2x + 3tx^2)z, \quad z(2) = 1.$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$z(t) = \exp\Big(\int_2^t (1 + 2x + 3sx^2) ds\Big).$$

Dla warunku początkowego $x_0 = 0$ rozwiązaniem wyjściowego zagadnienia Cauchy'ego jest funkcja $x(t) = 0$ (takie rozwiązanie można zgadnąć a następnie skorzystać z faktu, że dla tego zagadnienia Cauchy'ego zachodzi twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania w otoczeniu punktu $t = 2$). Stąd

$$z(t)\Big|_{x_0=0} = \exp\Big(\int_2^t ds\Big) = e^{t-2}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 3.11 Wskazać maksymalny przedział, na którym istnieje rozwiązanie zagadnienia początkowego:

a) $x' = 2x^2 - t,\ x(1) = 1,$

b) $x' = t + e^x,\ x(1) = 0,$

c) $x_1' = x_2^2,\ x_2' = x_1^2,\ x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2.$

Zadanie 3.12 Dla jakich warunków początkowych istnieją jednoznaczne rozwiązania równań:

a) $x'' = \operatorname{tg} x + \sqrt[3]{t}\,,$

b) $(t+1)x'' = x + \sqrt{x}\,,$

c) $x'' - xx^{(3)} = \sqrt[5]{x' - t}\,,$

d) $\begin{cases} x_1' = x_2^3 + \ln(t+1), \\ x_1 x_2' = \sqrt[3]{x_2 - t}\,. \end{cases}$

Zadanie 3.13 Dane jest zagadnienie Cauchy'ego

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0.$$

Niech $f \in C^1(\mathbb{R})$ oraz spełnia oszacowanie $|f(x) - \cos x| \leqslant 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że rozwiązanie tego zagadnienia Cauchy'ego jest ograniczone dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3.14 Niech funkcja $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągła, a funkcja $g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ niech spełnia warunek Lipschitza. Udowodnić, że układ równań

$$\begin{aligned} x_1' &= f(x_2)x_1, \\ x_2' &= g(x_2), \end{aligned}$$

uzupełniony dowolnym warunkiem początkowym, ma co najwyżej jedno rozwiązanie w dowolnym przedziale.

Zadanie 3.15 Udowodnić następujące rozszerzenie wyniku zadania 3.3.
Niech dane będzie równanie $x' = f(t,x)$, gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, a funkcja $f(t,x)$ jest ciągła na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Jeśli spełnione jest oszacowanie

$$|f(t,x)| \leqslant g(|x|),$$

gdzie g jest dodatnią funkcją ciągłą $g \in C([0,\infty))$, dla której

$$\int_0^\infty \frac{dt}{g(t)} = \infty,$$

to każde rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla tego równania istnieje dla każdego $t \geqslant 0$.

Zadanie 3.16 Dla równania

$$\epsilon x' = ax + b, \quad x(0) = x_0,$$

gdzie a i b są stałymi, znaleźć granicę $\lim_{\epsilon \to 0} x(t, \epsilon)$ dla $t > 0$.

Zadanie 3.17 Dane jest równanie $x' = f(x)$, gdzie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i malejącą. Niech $x^1(t)$ oraz $x^2(t)$ będą dwoma rozwiązaniami tego równania klasy C^1 z warunkami początkowymi $x^1(t_0) = x_0^1$ i $x^2(t_0) = x_0^2$ odpowiednio. Udowodnić, że $|x^1(t) - x^2(t)| \leqslant |x_0^1 - x_0^2|$.

Zadanie 3.18 Funkcje $u(t)$ i $v(t)$ są rozwiązaniami zagadnień Cauchy'ego

$$\begin{aligned} u' &= F(u), \quad u(t_0) = u_0, \\ v' &= F(v), \quad v(t_0) = v_0. \end{aligned}$$

Zakładamy, że funkcja F spełnia warunek Lipschitza ze stałą L. Pokazać, że spełnione jest oszacowanie

$$|u(t) - v(t)|^p \leqslant |u_0 - v_0|^p \exp\bigl(pL(t - t_0)\bigr),$$

dla dowolnego $p > 1$.

Zadanie 3.19 W poniższych przykładach znaleźć wskazane pochodne względem parametru lub warunku początkowego:

a) $x' = \frac{x}{t} + \mu t e^{-x}, x(1) = 1;$ znaleźć $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$

b) $x'' - x' = (x+1)^2 - \mu x^2, x(0) = \dfrac{1}{2}, x'(0) = -1;$ znaleźć $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=1}$

c) $x' = xy + t^2, 2y' = -y^2, x(1) = x_0, y(1) = y_0;$ znaleźć $\left.\dfrac{\partial x}{\partial y_0}\right|_{x_0=3,\ y_0=2}$

Zadanie 3.20 Niech funkcja $f(t, x)$ i jej pochodna $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ będą ciągłe na całej płaszczyźnie (t, x) oraz niech $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \leqslant k(t)$, gdzie $k(t)$ jest funkcją ciągłą. Udowodnić, że rozwiązanie równania $x' = f(t, x)$ z dowolnym warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$ istnieje na półprostej $[t_0, +\infty)$.

Zadanie 3.21 Udowodnić, że dla rozwiązania $x(t)$ zagadnienia początkowego

$$x' = t - x^2, \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \geqslant 0,\ x_0 \geqslant 0$$

istnieje granica $\lim_{t \to +\infty}\bigl(x(t) - \sqrt{t}\bigr) = 0$.

Zadanie 3.22 Niech funkcje $x_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}^m$, $n = 1, 2, \ldots$, będą rozwiązaniami równania $x' = f(x)$, gdzie funkcja $f \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła i ograniczona. Udowodnić, że jeśli ciąg $\{x_n(0)\}$ jest zbieżny, to z ciągu funkcyjnego $\{x_n\}$ można wybrać podciąg zbieżny jednostajnie do rozwiązania równania.

Zadanie 3.23 Rozważmy równanie $x' = f(x)$, gdzie $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza oraz warunek $f(0) = f(1) = 0$. Udowodnić, że każde rozwiązanie tego równania, które startuje z warunku początkowego $x_0 \in [0,1]$ nie wychodzi poza ten odcinek.

Rozdział 4

Układy równań liniowych

Zadania z tego rozdziału mają nauczyć jak rozwiązuje się układy równań liniowych. Ponieważ nie ma ogólnych metod rozwiązywania układów o zmiennych współczynnikach, pokażemy jedynie jak można znaleźć rozwiązanie ogólne takich układów, jeśli znana jest część rozwiązań szczególnych. Można tego dokonać wykorzystując technikę redukcji rzędu układu, której działanie pokażemy na przykładach. W przypadku układów równań o stałych współczynnikach przedstawimy metody znajdowania rozwiązań ogólnych. Mimo że teoria jest tu kompletna, to dla wykonania pełnych rachunków należy znajdować pierwiastki wielomianów charakterystycznych odpowiednich równań. Jak wiadomo, metody analitycznego obliczania tych pierwiastków ograniczone są to wielomianów stopnia co najwyżej czwartego (z wyjątkiem przypadków szczególnych), więc rozwiązywać będziemy układy, które nie dają wielomianów wyższych stopni. Pokażemy także na przykładach jak *Mathematica* pomaga w znajdowaniu rozwiązań układów równań liniowych. W zasadzie wykorzystując program *Mathematica* można rozwiązać każdy układ pierwszego rzędu (także niejednorodny) pod warunkiem, że *Mathematica* będzie potrafiła znaleźć pierwiastki wielomianu charakterystycznego, a w przypadku równań niejednorodnych dodatkowo będzie potrafiła obliczyć analitycznie występujące całki.

4.1 Ogólne układy pierwszego rzędu

Zadanie 4.1 Rozwiązać układ równań

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x$$

z warunkami początkowymi $x^a(t_0) = (1, 0)$ oraz $x^b(t_0) = (0, 1)$.
Rozwiązanie:
Rozważmy w pierwszej kolejności warunek początkowy $x^a(t_0) = (1, 0)$. Ponieważ drugie równanie naszego układu ma postać $x_2' = 2x_2$, więc jego rozwiązaniem jest funkcja $x_2(t) = 0$. Wstawiając tę funkcję do pierwszego równania

$x_1' = x_1 + tx_2$ mamy $x_1' = x_1$, co prowadzi do rozwiązania $x_1(t) = e^{t-t_0}$. Daje to rozwiązanie

$$x(t) = (e^{t-t_0}, 0).$$

Dla warunku początkowego $x^b(t_0) = (0, 1)$ z równania $x_2' = 2x_2$ dostajemy rozwiązanie $x_2(t) = e^{2(t-t_0)}$. Wstawiając to rozwiązanie do pierwszego równania dostajemy $x_1' = x_1 + te^{2(t-t_0)}$. Jest to niejednorodne równanie liniowe, które rozwiązujemy standardowymi metodami otrzymując $x_1(t) = e^{2(t-t_0)}(t-1) - e^{t-t_0}(t_0 - 1)$. Prowadzi to do rozwiązania

$$x(t) = \left(e^{2(t-t_0)}(t-1) - e^{t-t_0}(t_0-1), e^{2(t-t_0)}\right).$$

Ponieważ warunki początkowe $x^a(t_0)$ i $x^b(t_0)$ są liniowo niezależne, to z otrzymanych rozwiązań można otrzymać macierz fundamentalną układu

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & e^{2(t-t_0)}(t-1) - e^{t-t_0}(t_0-1) \\ 0 & e^{2(t-t_0)} \end{pmatrix}.$$

Zadanie 4.2 Znaleźć macierz fundamentalną dla układu równań

$$x' = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 1 & t \end{pmatrix} x.$$

Rozwiązanie:
Dla pierwszej zmiennej mamy równanie $x_1' = tx_1$, które po scałkowaniu daje $x_1(t) = c_1 e^{t^2/2}$. Wstawiając to rozwiązanie do drugiego równania $x_2' = x_1 + tx_2$ dostajemy równanie liniowe $x_2' = c_1 e^{t^2/2} + tx_2$. Standardowe metody prowadzą do rozwiązania $x_2(t) = c_1 t e^{t^2/2} + c_2 e^{t^2/2}$. Wystarczy teraz znaleźć rozwiązanie odpowiadające warunkom początkowym $x^a(0) = (1, 0)$ oraz $x^b(0) = (0, 1)$. Dla pierwszego z tych warunków początkowych otrzymujemy rozwiązanie $x^a(t) = (e^{t^2/2}, te^{t^2/2})$, dla drugiego $x^b(t) = (0, e^{t^2/2})$. Ponieważ wektory $x^a(0)$ oraz $x^b(0)$ są liniowo niezależne, macierz fundamentalna ma postać

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} & 0 \\ te^{t^2/2} & e^{t^2/2} \end{pmatrix}.$$

Dla układów równań liniowych o zmiennych współczynnikach nie ma ogólnej metody znajdowania rozwiązań. Kiedy jednak znamy jedno rozwiązanie takiego układu, to można zastosować metodę zwaną *obniżaniem rzędu* równania. Znajomość jednego rozwiązania szczególnego pozwala wtedy na obniżenie wymiaru układu równań o 1. W szczególności, na rozwiązanie dowolnego układu 2×2. Oczywiście znajomość większej liczby niezależnych rozwiązań pozwala na większe obniżenie wymiaru układu, a tym samym na rozwiązanie układów o większym wymiarze.

Załóżmy więc, że dla układu $x' = A(t)x$ znamy jedno rozwiązanie szczególne $\phi_1(t)$. Tworzymy macierz $Y(t)$, która powstaje z macierzy identycznościowej

I odpowiedniego wymiaru przez zastąpienie pierwszej kolumny wektorem $\phi_1(t)$. Następnie robimy podstawienie $x(t) = Y(t)y(t)$. Funkcja $y(t) = Y^{-1}(t)x(t)$ spełnia równanie

$$y' = Y^{-1}x' - Y^{-1}Y'Y^{-1}x = Y^{-1}(AY - Y')y.$$

Korzystając z faktu, że ϕ_1 jest rozwiązaniem dostajemy

$$AY - Y' = AY - (\phi_1', 0, 0, \ldots, 0) = A\big(Y - (\phi_1, 0, 0, \ldots, 0)\big),$$

gdzie zera oznaczają zerowe wektory kolumnowe w odpowiedniej macierzy. Wynika stąd, że równanie $y' = Y^{-1}(AY - Y')y$ nie zawiera po prawej stronie zmiennej y_1. Można więc najpierw rozwiązać układ dla zmiennych $y_2, \ldots, y_n$ a potem do tego rozwiązania dołączyć y_1 rozwiązując dodatkowe równanie skalarne.

Zadanie 4.3 Znaleźć macierz fundamentalną układu

$$x' = \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ 2t & 0 \end{pmatrix} x,$$

korzystając z faktu, że wektor $(1, t^2)$ jest jednym z rozwiązań tego układu.
Rozwiązanie:
Korzystając z metody redukcji rzędu robimy podstawienie $x(t) = Y(t)y(t)$, gdzie

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prowadzi to do następującego równania dla funkcji $y(t)$

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} y\,.$$

Jak łatwo zauważyć równanie dla y_2 ma postać $y_2' = t^2 y_2$. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja $y_2(t) = e^{t^3/3}$. Całkujemy teraz pierwszą składową wektora y z równania $y_1' = -y_2$, co daje rozwiązanie w postaci $y_1(t) = -\int e^{t^3/3}$. Przechodząc do zmiennej $x(t)$ dostajemy

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\int e^{t^3/3} \\ e^{t^3/3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\int e^{t^3/3} \\ e^{t^3/3} - t^2 \int e^{t^3/3} \end{pmatrix}.$$

Prowadzi to do następującej macierzy fundamentalnej

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\int e^{t^3/3} \\ t^2 & e^{t^3/3} - t^2 \int e^{t^3/3} \end{pmatrix}.$$

Zadanie 4.4 Obliczyć wyznacznik Wrońskiego dla pary funkcji $f_1(t) = (t, 0)$ i $f_2(t) = (t^2, 0)$.
Rozwiązanie:
Niech
$$X(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Elementarny rachunek pokazuje, że
$$\det X(t) = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$
Z drugiej strony funkcje f_1 i f_2 są niezależne liniowo na całej prostej. Przykład ten pokazuje, że związek pomiędzy liniową niezależnościa funkcji a niezerową wartości wyznacznika Wrońskiego jest prawdziwa jedynie, gdy rozpatrywane funkcje są rozwiązaniami pewnego układu liniowych równań różniczkowych.

4.2 Układy o stałych współczynnikach

Zadanie 4.5 Rozwiązać układ równań
$$x' = Rx,$$
z warunkiem początkowym $x(0) = (4, -5)$, gdzie
$$R = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$
Rozwiązanie:
Znajdujemy wielomian charakterystyczny
$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & -3 \\ 6 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2).$$
Wartościami własnymi są: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Znajdziemy wektory własne odpowiadające tym wartościom własnym.

1) $\lambda_1 = -1$. Szukamy wektora, takiego że
$$(R + I)v_1 = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} v_1 = 0.$$
Stąd
$$v_1 = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
i rozwiązaniem jest funkcja (przyjmujemy $c = 1$)
$$x_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) $\lambda_2 = 2$. Szukamy wektora, takiego że

$$(R - 2I)v_2 = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} v_2 = 0.$$

Stąd

$$v_2 = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

i otrzymujemy rozwiązanie

$$x_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązania zagadnienia początkowego poszukujemy w postaci kombinacji liniowej $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$. Wtedy warunkowi początkowemu odpowiada równanie $c_1(-1, 1) + c_2(1, -2) = (4, -5)$. Znajdując z tego równania wartości c_1 i c_2 otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$x(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-t} + e^{2t} \\ -3e^{-t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Zadanie 4.6 Znaleźć rozwiązanie fundamentalne układu

$$x' = Rx,$$

gdzie

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Znajdujemy wielomian charakterystyczny

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2).$$

Wartościami własnymi są: $\lambda_1 = -1$ (pierwiastek podwójny), $\lambda_2 = 2$. Znajdziemy wektory własne odpowiadające tym wartościom własnym.

1) $\lambda_1 = -1$. Jest to pierwiastek dwukrotny. Szukamy wektora własnego

$$(R + I)v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} v_1 = 0.$$

Otrzymujemy tylko jeden związek na współrzędne tego wektora. Stąd istnieją dwa liniowo niezależne wektory własne

$$v_1 = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oraz
$$v_2 = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Oznacza to, że funkcje
$$x_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
oraz
$$x_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
są rozwiązaniami równania.

2) $\lambda_2 = 2$. Szukamy wektora, takiego że
$$(R - 2I)v_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} v_3 = 0.$$
Stąd
$$v_3 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
i otrzymujemy rozwiązanie
$$x_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Macierz fundamentalna ma więc postać
$$X(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} & 0 & e^{2t} \\ e^{-t} & e^{-t} & e^{2t} \\ 0 & -e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Zadanie 4.7 Znaleźć rozwiązanie fundamentalne układu
$$x' = Rx,$$
gdzie
$$R = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Znajdujemy wielomian charakterystyczny
$$p(\lambda) = \lambda^2 + 12\lambda + 37 = (\lambda + 6 - i)(\lambda + 6 + i).$$

Wartościami własnymi są: $\lambda_1 = -6 + i$, $\lambda_2 = -6 - i$.

Poszukujemy wektora własnego dla λ_1

$$(R + (6 - i)I)v_1 = \begin{pmatrix} -1 - i & 1 \\ -2 & 1 - i \end{pmatrix} v_1 = 0.$$

Wektor ten ma postać (pomijamy stałą)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Otrzymujemy wtedy

$$z_1(t) = e^{-6t}\left(\cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = e^{-6t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix},$$

$$z_2(t) = e^{-6t}\left(\cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = e^{-6t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}.$$

Z $z_1(t)$ i $z_2(t)$ otrzymujemy macierz fundamentalną

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-6t} \cos t & e^{-6t} \sin t \\ e^{-6t}(\cos t - \sin t) & e^{-6t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}.$$

Zadanie 4.8 Znaleźć rozwiązanie fundamentalne układu

$$x' = Rx,$$

gdzie

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -10 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:

Znajdujemy wielomian charakterystyczny

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 4 & -10 \\ 2 & 1 - \lambda & -2 \\ 2 & 2 & -5 - \lambda \end{pmatrix} = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 1).$$

Wartościami własnymi są: $\lambda_1 = -1$ (pierwiastek podwójny), $\lambda_2 = 1$. Znajdziemy wektory własne odpowiadające tym wartościom własnym.

1) $\lambda_1 = -1$. Jest to pierwiastek dwukrotny. Szukamy wektora własnego

$$(R + I)v_1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -10 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} v_1 = 0.$$

Otrzymujemy dwa związki na współrzędne tego wektora. Stąd istnieje jeden liniowo niezależny wektor własny

$$v_1 = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Oznacza to, że funkcja

$$x_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

jest rozwiązaniem równania. Drugiego niezależnego liniowo rozwiązania będziemy poszukiwać w postaci wektora v_2, takiego że

$$(R + I)v_2 = v_1,$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -10 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z rozwiązania tego równania otrzymujemy

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Oznacza to, że funkcja

$$x_2(t) = e^{-t}(v_2 + t(R + I)v_2) = e^{-t}\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

jest rozwiązaniem równania.

2) $\lambda_2 = 1$. Szukamy wektora, takiego że

$$(R - I)v_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} v_3 = 0.$$

Stąd

$$v_3 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i otrzymujemy rozwiązanie

$$x_3(t) = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Macierz fundamentalna ma więc postać

$$X(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} & (1-t)e^{-t} & e^t \\ e^{-t} & te^{-t} & 2e^t \\ 0 & e^{-t}/2 & e^t \end{pmatrix}.$$

Mathematica dostarcza wielu narzędzi do rozwiązywania układów równań liniowych. W kolejnych zadaniach zilustrujemy te możliwości na prostych przykładach.

Zadanie 4.9 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu

$$x' = Rx,$$

gdzie

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -5 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Rozwiążemy to zadanie w programie *Mathematica* korzystając z `DSolve`. W tym celu zapisujemy równanie w postaci układu

$$\begin{aligned} x' &= 5x + 3y - 3z, \\ y' &= 2x + 4y - 5z, \\ z' &= -4x + 2y - 3z. \end{aligned}$$

Rozwiązanie otrzymujemy wykorzystując polecenie `DSolve`

```
DSolve[{x'[t]==5*x[t]+3*y[t]-3*z[t],
        y'[y]==2*x[t]+4*y[t]-5*z[t],
        z'[t]==-4*x[t]+2*y[t]-3*z[t]},
        {x[t],y[t],z[t]},t]
```

Mathematica podaje nam wynik zależny od 3 dowolnych parametrów

$$\begin{aligned} \{\{x[t]-&>\frac{1}{3}e^{-t}(1+2e^{9t})C[1] + \frac{1}{3}e^{-t}(-1+e^{9t})C[2] - \frac{1}{3}e^{-t}(-1+e^{9t})C[3], \\ y[t]-&>\frac{2}{27}e^{-t}(-7+7e^{9t}-36t)C[1] + \frac{1}{27}e^{-t}(20+7e^{9t}+72t)C[2] - \\ &\frac{1}{27}e^{-t}(-7+7e^{9t}+72t)C[3], \\ z[t]-&>-\frac{4}{27}e^{-t}(-1+e^{9t}+18t)C[1] - \frac{2}{27}e^{-t}(-1+e^{9t}-36t)C[2] + \\ &\frac{1}{27}e^{-t}(25+2e^{9t}-72t)C[3] \end{aligned}$$

Zadanie 4.10 Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego dla układu

$$x' = Rx,$$

z warunkiem początkowym $x(0) = (1, 1)$, gdzie

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Podobnie jak poprzednio przepisujemy równanie w postaci układu

$$x' = 2x,$$
$$y' = 3x + 2y.$$

Rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego znajdujemy za pomocą polecenia `DSolve`

```
DSolve[{x'[t]==2*x[t],y'[t]==3*x[t]+2*y[t],
          x[0]==1,y[0]==1},
          {x[t],y[t]},t]
```

W wyniku otrzymujemy rozwiązanie zagadnienia początkowego
$\{\{x[t]- > e^{2t}, y[t]- > e^{2t}(1 + 3t)\}\}$

Mathematica pozwala w bardzo efektywny sposób znajdować rozwiązania fundamentalne układów równań liniowych. Służą do tego dwa polecenia: `MatrixExp` oraz `Eigensystem`.

Zadanie 4.11 Znaleźć rozwiązanie fundamentalne dla układu

$$x' = Rx,$$

gdzie

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Zaczynamy od zdefiniowania macierzy układu

```
ra={{-1,2,2},{2,2,2},{-3,-6,-6}};
```

Wystarczy teraz wykonać polecenie

```
MatrixExp[ra t]
```

aby otrzymać rozwiązanie fundamentalne

$$\{\{e^{-3t}(-1 + 2e^t), 2e^{-3t}(-1 + e^t), 2e^{-3t}(-1 + e^t)\},$$
$$\{e^{-2t}(-1 + e^{2t}), \{e^{-2t}(-1 + 2e^{2t}), e^{-2t}(-1 + e^{2t})\},$$
$$\{-1 + e^{-3t}, e^{-3t}(2 - 2e^{3t}), e^{-3t}(2 - e^{3t})\}\}$$

Rozwiążemy teraz poprzednie zadanie wykorzystując polecenie `Eigensystem`.

Zadanie 4.12 Znaleźć rozwiązanie fundamentalne dla układu

$$x' = Rx,$$

gdzie

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Podobnie jak poprzednio definiujemy macierz układu

```
ra={{-1,2,2},{2,2,2},{-3,-6,-6}};
```

Korzystając z polecenia `Eigensystem` znajdujemy wartości własne i wektory własne macierzy `ra`.

```
{roots,vectors}=Eigensystem[ra]
```

Jako wynik otrzymujemy

```
{{-3,-2,0},{{-1,0,1},{-2,1,0},{0,-1,1}}}
```

W pierwszym nawiasie klamrowym znajdują się wartości własne, a następnie odpowiadające im wektory własne. Aby otrzymać macierz fundamentalną należy wykonać polecenie

```
 Transpose[Exp[roots t]*vectors]
```

W wyniku otrzymamy rozwiązanie jako zbiór 3 wektorów
$\{\{-e^{-3t}, -2e^{-2t}, 0\}, \{0, e^{-2t}, -1\}, \{e^{-3t}, 0, 1\}\}$
Zauważmy, że to rozwiązanie różni się od rozwiązania z zadania 4.11. Rozwiązanie otrzymane w zadaniu 4.11 miało oczekiwane cechy eksponenty macierzy, tj. dla $t = 0$ dawało macierz identycznościową. Otrzymana powyżej macierz nie ma tej własności. Wystarczy jednak wykonać jedną dodatkową operację, aby otrzymać identyczny wynik

```
W[t_]=Transpose[Exp[roots t]*vectors];
W[t].Inverse[W[0]]//MatrixForm
```

Teraz otrzymujemy już macierz o tej własności, że dla $t = 0$ daje macierz identycznościową.

Następne kilka zadań pokazuje jak rozwiązuje się niejednorodne równania liniowe korzystając z wielowymiarowej wersji metody uzmienniania stałych.

Zadanie 4.13 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu

$$x' = Rx + f,$$

gdzie

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 2e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Znajdujemy wielomian charakterystyczny

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-3).$$

Wartościami własnymi są: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Znajdziemy wektory własne odpowiadające tym wartościom własnym.

1) $\lambda_1 = -1$. Wektor własny

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

i rozwiązaniem jest funkcja

$$x_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2) $\lambda_2 = 3$. Wektor własny

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i otrzymujemy rozwiązanie

$$x_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Otrzymujemy stąd macierz fundamentalna układu

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Poszukujemy teraz rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego $x_p(t) = Xu$, gdzie funkcja u spełnia równanie $u' = X^{-1}f$. Pierwszym krokiem jest znalezienie macierzy odwrotnej X^{-1}. Obliczamy wyznacznik macierzy $\det X = -2e^{2t}$. Stąd

$$X^{-1}(t) = -\frac{1}{2e^{2t}} \begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix},$$

$$X^{-1}f = -\frac{1}{2e^{2t}} \begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{t} \\ e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Całkując równanie $u' = X^{-1}f$ otrzymujemy

$$u(t) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 15e^t \\ e^{5t} \end{pmatrix},$$

czyli

$$x_p(t) = Xu = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15e^t \\ e^{5t} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8e^{4t} \\ 7e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie ogólne jest dane wzorem $x(t) = X(t)C + x_p(t)$, gdzie C jest wektorem dowolnych współczynników.

Zadanie 4.14 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu

$$x' = Rx + f,$$

gdzie

$$R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Znajdujemy wielomian charakterystyczny

$$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda-1)^2.$$

Wartościami własnymi są: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ (pierwiastek podwójny). Znajdziemy wektory własne odpowiadające tym wartościom własnym.

1) $\lambda_1 = 0$. Wektor własny

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i rozwiązaniem jest funkcja

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) $\lambda_2 = 1$. Znajdujemy 2 wektory własne

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i otrzymujemy rozwiązania

$$x_2(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Otrzymujemy stąd macierz fundamentalną układu

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t & e^t \\ 1 & e^t & 0 \\ 1 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Poszukujemy teraz rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego $x_p(t) = Xu$, gdzie funkcja u spełnia równanie $u' = X^{-1}f$. Pierwszym krokiem jest znalezienie macierzy odwrotnej X^{-1}. Obliczamy wyznacznik macierzy $\det X = -e^{2t}$. Stąd

$$X^{-1}(t) = -\frac{1}{e^{2t}} \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t} & e^{2t} \\ -e^t & 0 & e^t \\ -e^t & e^t & 0 \end{pmatrix},$$

$$X^{-1}f = -\frac{1}{e^{2t}} \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t} & e^{2t} \\ -e^t & 0 & e^t \\ -e^t & e^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} - e^t \\ 1 - e^{-2t} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Całkując równanie $u' = X^{-1}f$ otrzymujemy

$$u(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} - e^t \\ t - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ t \end{pmatrix},$$

czyli

$$x_p(t) = Xu = \begin{pmatrix} 1 & e^t & e^t \\ 1 & e^t & 0 \\ 1 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-t} - e^t \\ t - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(2t-1) - \frac{1}{2}e^{-t} \\ e^t(t-1) - \frac{1}{2}e^{-t} \\ e^t(t-1) - e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie ogólne jest dane wzorem $x(t) = X(t)C + x_p(t)$, gdzie C jest wektorem dowolnych współczynników.

Zadanie 4.15 Znaleźć w programie *Mathematica* rozwiązanie szczególne układu

$$x' = Rx + f,$$

gdzie

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & \frac{11}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} t-1 \\ 2 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Zaczynamy od zdefiniowania macierzy układu

```
ra={{0,1,0},{0,0,1},{-3,11/2,3/2}};
```

Wystarczy teraz wykonać polecenie

```
W[t_]=MatrixExp[ra t];
```

aby otrzymać rozwiązanie fundamentalne. Definiujemy człon niejednorodny

```
fa[t_]={t-1,2,Exp[t]};
```

i wykonujemy operację

```
x[t_]=Simplify[W[t].Integrate[Simplify[
        Inverse[W[t]].fa[t]],t]]
```

Otrzymujemy wtedy poszukiwane rozwiązanie szczególne

$$\{\frac{1}{36}(-109 - 12e^t - 66t), \frac{1}{6}(-5 - 2e^t - 6t), -3 - \frac{e^t}{3}\}$$

4.3 Równania skalarne wyższego rzędu

Zadanie 4.16 Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0,$$

z warunkiem początkowym $x(0) = 4$, $x'(0) = 5$, $x''(0) = 9$.
Rozwiązanie:
Znajdujemy wielomian charakterystyczny

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{3t}.$$

Obliczamy x' oraz x''

$$x'(t) = c_1e^t + 2c_2e^{2t} + 3c_3e^{3t},$$
$$x''(t) = c_1e^t + 4c_2e^{2t} + 9c_3e^{3t}.$$

Mamy więc

$$x(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 4,$$
$$x'(0) = c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 5,$$
$$x''(0) = c_1 + 4c_2 + 9c_3 = 9.$$

Rozwiązanie tego układu liniowego daje

$$c_1 = 4, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = 1.$$

Rozwiązaniem zagadnienia początkowego jest funkcja

$$x(t) = 4e^t - e^{2t} + e^{3t}.$$

Zadanie 4.17 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''' - x'' + x' - x = 0,$$

Rozwiązanie:
Znajdujemy wielomian charakterystyczny

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1).$$

Oznacza to, że mamy jeden pierwiastek rzeczywisty $\lambda_1 = 1$ oraz dwa sprzężone pierwiastki zespolone $\lambda_2 = i$ i $\lambda_3 = -i$. Rozwiązanie ogólne ma więc postać

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 \sin t + c_3 \cos t.$$

Zadanie 4.18 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''' + 3x'' + 3x' + x = 0,$$

Rozwiązanie:
Znajdujemy wielomian charakterystyczny

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3.$$

Oznacza to, że mamy jeden pierwiastek rzeczywisty potrójny $\lambda_1 = -1$. Rozwiązanie ogólne ma więc postać

$$x(t) = e^{-t}(c_1 + c_2 t + c_3 t^2).$$

Zadanie 4.19 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x^{(4)} + 4x''' + 6x'' + 4x' = 0,$$

Rozwiązanie:
Znajdujemy wielomian charakterystyczny

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda + 2)\big((\lambda + 1)^2 + 1\big).$$

Oznacza to, że mamy dwa pierwiastki rzeczywiste $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = -2$ oraz dwa sprzężone pierwiastki zespolone $\lambda_3 = -1 + i$ i $\lambda_4 = -1 - i$. Rozwiązanie ogólne ma więc postać

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-2t} + e^{-t}(c_3 \sin t + c_4 \cos t).$$

Zadanie 4.20 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$t^2 x'' - 3tx' + 4x = 0,$$

wykorzystując fakt, że $x_1(t) = t^2$ jest rozwiązaniem szczególnym tego równania.
Rozwiązanie:

Postulujemy rozwiązanie w postaci $x(t) = c(t)x_1(t)$. Wstawiając tę postulowaną postać rozwiązania do równania otrzymujemy

$$\begin{aligned}&t^2(c''x_1 + 2c'x_1' + cx_1'') - 3t(c'x_1 + cx_1') + 4cx_1 = \\ &c(t^2x_1'' - 3tx_1' + 4x_1) + x_1(t^2c'' - 3tc') + 2t^2c'x_1' = t^4c'' + t^3c' = 0\end{aligned}$$

Niech $z(t) = c'(t)$. Mamy wtedy równanie $tz' + z = 0$, którego rozwiązaniem jest funkcja $z(t) = \frac{c_1}{t}$. Stąd $c(t) = c_1 \ln t + c_2$. Otrzymujemy więc rozwiązanie ogólne w postaci

$$x(t) = c_1t^2 \ln t + c_2t^2.$$

Mathematica łatwo rozwiązuje równania n-tego rzędu pod warunkiem, że rząd ten nie jest zbyt wysoki. Ograniczenia są związane ze znajdowaniem pierwiastków wielomianu charakterystycznego, co w ogólności jest możliwe tylko dla wielomianów stopnia co najwyżej 4. Oczywiście w szczególnych przypadkach *Mathematica* rozwiązuje także równania wyższego rzędu.

Zadanie 4.21 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0,$$

wykorzystując program *Mathematica*.
Rozwiązanie:
To jest przykład równania, które *Mathematica* rozwiązuje dla dowolnych współczynników

```
DSolve[x'''[t] -6*x''[t]+11*x'[t]-6*x[t]==0,x[t],t]
```

Otrzymujemy wtedy rozwiązanie
$\{\{x[t]->e^tC[1] + e^{2t}C[2] + e^{3t}C[3]\}\}$

Zadanie 4.22 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x^{(5)} - 10x^{(4)} + 39x''' - 74x'' + 68x' - 24x = 0,$$

wykorzystując program *Mathematica*.
Rozwiązanie:
Ponieważ równanie jest 5-tego rzędu, to *Mathematica* może mieć problem z jego rozwiązaniem. Okazuje się jednak, że *Mathematica* znajduje rozwiązanie ogólne.

```
DSolve[x'''''[t]-10*x''''[t]+39*x'''[t] -74*x''[t]+
        68*x'[t]-24*x[t]==0,x[t],t]
```

Otrzymujemy wtedy rozwiązanie
$\{\{x[t]->e^tC[1] + e^{2t}C[2] + e^{2t}tC[3] + e^{2t}t^2C[4] + e^{3t}C[5]\}\}$

Zadanie 4.23 Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$x'' + 4x' + 4x = 0, \quad x(0) = 1, x'(0) = -\frac{1}{2},$$

wykorzystując program *Mathematica*.
Rozwiązanie:
Takie zagadnienia początkowe *Mathematica* rozwiązuje dla dowolnych współczynników

```
DSolve[{x''[t] +4*x'[t]+4*x[t]==0,x[0]==1,x'[0]==-1/2},
        x[t],t]
```

Otrzymujemy wtedy rozwiązanie
$\{\{x[t]->\frac{1}{2}e^{-2t}(2+3t)\}\}$

Mathematica potrafi także rozwiązywać liniowe równania niejednorodne, co pokazuje następujące zadanie.

Zadanie 4.24 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''' - x'' - 7x' + 15x = t^2 e^{-3t} + e^{2t}\cos(3t),$$

wykorzystując program *Mathematica*.
Rozwiązanie:
Rozwiązanie znajdujemy standardową metodą

```
DSolve[x'''[t] -x''[t]-7*x'[t] +15*x[t]==
        t^2*Exp[-3*t]+Exp[2*t]*Cos[3*t],x[t],t]
```

Otrzymujemy wtedy rozwiązanie, które wygląda na bardzo skomplikowane. To skomplikowane wyrażenie można uprościć poleceniem `Simplify` (poniższe polecenie zakłada, że *Mathematica* wypisała skomplikowany wzór jako rozwiązanie; aby nie przepisywać tego wzoru odwołujemy się do niego przez symbol `%`)

```
Simplify[%]
```

Uproszczone rozwiązanie jest następujące
$\{\{x[t]->e^{-3t}C[3]+e^{2t}C[2]Cos[t]+e^{2t}C[1]Sin[t]+\dfrac{60e^{-3t}}{28561}+\dfrac{37}{4394}e^{-3t}t+\dfrac{5}{338}e^{-3t}t^2+\dfrac{1}{78}e^{-3t}t^3-\dfrac{5}{272}e^{2t}Cos[3t]-\dfrac{3}{272}e^{2t}Sin[3t]\}\}$
Wyraz $\frac{60e^{-3t}}{28561}$ można włączyć do $e^{-3t}C[3]$ dokonując dalszego uproszczenia rozwiązania.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 4.25 Pokazać, że podane niżej funkcje nie są liniowo zależne w obszarze ich określoności, ale ich wyznacznik Wrońskiego jest równy zeru:

a) $x_1(t) = \begin{cases} t^2 & \text{dla} \quad -1 \leqslant t \leqslant 0 \\ 0 & \text{dla} \quad 0 < t \leqslant 1 \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad -1 \leqslant t \leqslant 0 \\ t^2 & \text{dla} \quad 0 < t \leqslant 1 \end{cases}$

b) $x_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ (t-2)^2 & \text{dla} \quad 2 < t \leqslant 4 \end{cases}$

$x_2(t) = \begin{cases} (t-2)^2 & \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ 0 & \text{dla} \quad 2 < t \leqslant 4 \end{cases}$

c) $x_1(t) = \begin{cases} t^3 & \text{dla} \quad -2 \leqslant t \leqslant 0 \\ 0 & \text{dla} \quad 0 < t \leqslant 1 \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad -2 \leqslant t \leqslant 0 \\ t^2 & \text{dla} \quad 0 < t \leqslant 1 \end{cases}$

d) $x_1(t) = t^2 \quad \text{dla} \quad -1 \leqslant t \leqslant 1 \qquad x_2(t) = t|t| \quad \text{dla} \quad -1 \leqslant t \leqslant 1$

Zadanie 4.26 Znaleźć macierz fundamentalną równania $x' = Rx$, gdy macierz R dana jest wzorem:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Zadanie 4.27 Znaleźć $\det \exp R$, nie obliczając macierzy $\exp R$, dla poniższych macierzy R:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Zadanie 4.28 Rozwiązać układy równań niejednorodnych:

a) $$\begin{cases} x_1' = x_2 + 2e^t \\ x_2' = x_1 + t^2 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1' = x_2 - 5\cos t \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x_1' = 2x_2 - x_1 + 1 \\ x_2' = 3x_2 - 2x_1 \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + 2\sin t \\ x_2' = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + 2e^t \end{cases}$$

f) $$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 4x_2 - 8 \\ x_2' = 3x_1 + 6x_2 \end{cases}$$

g) $$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 + 2e^t \\ x_2' = x_1 + 2x_2 - 3e^{4t} \end{cases}$$

h) $$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = 2x_2 - x_1 - 5e^t \sin t \end{cases}$$

Zadanie 4.29 Rozwiązać poniższe zagadnienia początkowe:

a) $$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = 4x_2 - 2x_1 \\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = -1 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 + x_3 \\ x_3' = x_2 - 2x_3 - 3x_1 \\ x_1(0) = 0,\ x_2(0)=0,\ x_3(0)=1 \end{cases}$$

c) $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 - t^2 + t - 2 \\ x_2' = -2x_1 + 4x_2 + 2t^2 - 4t - 7 \\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 - \cos t \\ x_2' = -2x_1 - x_2 + \sin t + \cos t \\ x_1(0) = 1,\ x_2(0) = -2 \end{cases}$

Zadanie 4.30 Rozwiązać układy równań, sprowadzając je do układów pierwszego rzędu:

a) $\begin{cases} x_1'' - 2x_2'' + x_2' + x_1 - 3x_2 = 0 \\ 4x_2'' - 2x_1'' - x_1' - 2x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1'' - 3x_1 - 4x_2 = 0 \\ x_2'' + x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1' - 5x_2' - 4x_2 + x_1 = 0 \\ 3x_1' - 4x_2' - 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1'' - 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_2'' - x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1'' + 2x_2'' - x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1' + x_2' - x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1'' + 3x_2'' - x_1 = 0 \\ x_1' + 3x_2' - 2x_2 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x_1'' + 4x_1' - 2x_2' - 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1'' - x_2'' - 4x_1' + 2x_2' + 2x_2 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x_1'' + 3x_2'' + 2x_1' + x_2' + x_1 + x_2 = 0 \\ x_1'' + 3x_2'' + 4x_1' + 2x_2' - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

Zadanie 4.31 Znaleźć rozwiązania ogólne równań jednorodnych:

a) $x^{(4)} - x = 0$

b) $x^{(6)} + 64x = 0$

c) $x^{(4)} + 4x'' + 3x = 0$

d) $x^{(5)} + 8x^{(3)} + 16x' = 0$

Zadanie 4.32 Znaleźć rozwiązania ogólne równań niejednorodnych:

a) $3x^{(4)} + x^{(3)} = 2$

b) $x^{(4)} - 2x^{(3)} + 2x'' - 2x' + x = 1$

c) $x^{(4)} - 2x'' + x = \cos t$

d) $x^{(3)} - 3x'' + 3x' - x = e^t \cos 2t$

Zadanie 4.33 Rozwiązać równania niejednorodne, rozkładając część niejednorodną na składniki, a następnie dodając odpowiednie rozwiązania szczególne:

a) $x^{(4)} + 2x^{(3)} + 2x'' + 2x' + x = te^t + \frac{1}{2}\cos t$

b) $x^{(5)} + 4x^{(3)} = e^t + 3\sin 2t + 1$

c) $x^{(5)} - x^{(4)} = te^t - 1$

d) $x^{(5)} + x^{(3)} = t + 2e^{-t}$

Zadanie 4.34 Znaleźć rozwiązanie układu równań

$$\begin{aligned} tx_1' &= x_1 - 2x_2, \\ tx_2' &= x_1 - 2x_2. \end{aligned}$$

Pokazać, że rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia początkowego istnieje na całym $\mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dane początkowe spełniają warunek $x_1(t_0) = 2x_2(t_0)$.

Zadanie 4.35 Równanie postaci

$$a_n t^n x^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 t x' + a_0 x = 0$$

nazywa się **jednorodnym równaniem Cauchy'ego-Eulera**. Pokazać, że zamiana zmiennej niezależnej $s = \ln t$ redukuje równanie Cauchy'ego-Eulera do równania liniowego o stałych współczynnikach.

Zadanie 4.36 Korzystając z wyniku poprzedniego zadania, rozwiązać równania Cauchy'ego-Eulera:

a) $t^2 x'' + tx' - x = 0$

b) $(t+2)^2 x'' + 3(t+2)x' - 3x = 0$

c) $t^2 x'' + tx' + x = t(6 - \ln t)$

d) $t^2 x'' + tx' - x = t^m, \quad m \neq \pm 1$

Rozdział 5

Układy autonomiczne

Ten rozdział dotyczy badania własności autonomicznych układów równań. Na początku zajmiemy się problemem stabilności rozwiązań w sensie Lapunowa. Kolejne zadania poświęcimy badaniu punktów krytycznych układów autonomicznych oraz lokalnym portretom fazowym w otoczeniu punktów krytycznych. Wszystkie te zadania będą dotyczyły układów z dwoma zmiennymi zależnymi, aby odpowiednie portrety fazowe dały się narysować na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Analizować będziemy jedynie układy równań nieliniowych, ponieważ analiza układów liniowych w dwóch zmiennych została dokładnie opisana w Skrypcie. W ostatniej części rozdziału pokażemy przykłady znajdowania całek pierwszych dla układów nieliniowych.

5.1 Stabilność w sensie Lapunowa

Zadanie 5.1 Zbadać stabilność rozwiązania zagadnienia początkowego

$$x' = 1 + t - x, \quad x(0) = 0.$$

Rozwiązanie:
Równanie jest równaniem liniowym, dla którego łatwo znajdujemy rozwiązanie ogólne

$$x(t) = t + ce^{-t}.$$

Z warunku początkowego otrzymujemy $c = 0$, czyli rozwiązaniem zagadnienia początkowego jest funkcja $\phi_0(t) = t$.

Jeśli warunek początkowy ma postać $x(0) = x_0$, otrzymamy rozwiązanie $\phi_1(t) = x_0 e^{-t} + t$.

Jeśli $|x_0| < \delta$, to $|\phi_1(t) - \phi_0(t)| = |x_0|e^{-t} < \varepsilon = \delta$, więc $\phi_0(t)$ jest rozwiązaniem stabilnym (z definicji). Ponieważ $\lim_{t\to\infty} x_0 e^{-t} = 0$, więc rozwiązanie $\phi_0(t)$ jest asymptotycznie stabilne.

Zadanie 5.2 Zbadać stabilność rozwiązania zagadnienia początkowego

$$x' = 2t(x + 1), \quad x(0) = 0.$$

Rozwiązanie:
Równanie jest równaniem o zmiennych rozdzielonych, dla którego łatwo znajdujemy rozwiązanie ogólne
$$x(t) = -1 + ce^{t^2}.$$
Z warunku początkowego otrzymujemy $c = 1$, czyli rozwiązaniem zagadnienia początkowego jest funkcja $\phi_0(t) = -1 + e^{t^2}$.

Jeśli warunek początkowy ma postać $x(0) = x_0$, otrzymamy rozwiązanie $\phi_1(t) = -1 + (x_0 + 1)e^{t^2}$.

Jeśli $|x_0| < \delta$, to $|\phi_1(t) - \phi_0(t)| = |x_0|e^{t^2}$. Ponieważ funkcja e^{t^2} jest nieograniczona, więc $\phi_0(t)$ nie jest rozwiązaniem stabilnym.

Zadanie 5.3 Zbadać stabilność położenia równowagi dla równania
$$x' = \sin^2 x.$$

Rozwiązanie:
Położenia równowagi to stałe rozwiązania równania. Ponieważ dla $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, mamy $\sin^2 k\pi = 0$, więc wszystkie te punkty są położeniami równowagi. Zbadamy jedynie położenie równowagi $x(t) = 0$.

Całkując równanie z warunkiem $x(0) = x_0$ otrzymujemy $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0 - t$, czyli
$$x = \operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{ctg} x_0 - t).$$
Ponieważ
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{ctg} x_0 - t) = \pi,$$
więc rozwiązanie $x(t) = 0$ nie jest stabilne.

Zadanie 5.4 Zbadać stabilność rozwiązania zerowego dla układu
$$\begin{aligned} x' &= -x - 2y + x^2y^2, \\ y' &= x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x^3y. \end{aligned}$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że para funkcji $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ jest rozwiązaniem tego układu równań. Aby zbadać stabilność tego rozwiązania skonstruujemy funkcję Lapunowa dla tego układu. Właściwej funkcji Lapunowa będziemy poszukiwać wśród funkcji postaci $V(x, y) = ax^2 + by^2$. Mamy wtedy
$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} =& 2ax(-x - 2y + x^2y^2) + 2by\big(x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x^3y\big) = \\ & -(2ax^2 + by^2) + (b - 2a)(2xy - x^3y^2). \end{aligned}$$
Biorąc $b = 2a$ oraz $a > 0$ dostajemy
$$\frac{dV}{dt} = -2a(x^2 + y^2).$$

Oznacza to, że dla $(x, y) \neq (0, 0)$ mamy $\frac{dV}{dt} < 0$, co pokazuje, że rozwiązanie zerowe jest asymptotycznie stabilne.

Zadanie 5.5 Zbadać stabilność rozwiązania zerowego dla układu

$$\begin{aligned} x' &= -xy^4, \\ y' &= x^4 y. \end{aligned}$$

Rozwiązanie:
Para funkcji $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ jest rozwiązaniem tego układu równań. Aby zbadać stabilność tego rozwiązania skonstruujemy funkcję Lapunowa dla tego układu. Ze względu na postać prawych stron równań jako funkcję Lapunowa wybieramy funkcję $V(x, y) = x^4 + y^4$. Mamy wtedy

$$\frac{dV}{dt} = 4x^3(-xy^4) + 4y^3(x^4 y) = -4x^4y^4 + 4x^4y^4 = 0.$$

Wynika stąd, że

$$\frac{dV}{dt} = 0.$$

Oznacza to, że rozwiązanie zerowe jest stabilne, ale nie jest asymptotycznie stabilne.

Zadanie 5.6 Zbadać stabilność rozwiązania zerowego dla układu

$$\begin{aligned} x' &= y - x + xy, \\ y' &= x - y - x^2 - y^3. \end{aligned}$$

Rozwiązanie:
Para funkcji $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ jest rozwiązaniem tego układu równań. Aby zbadać stabilność tego rozwiązania skonstruujemy funkcję Lapunowa dla tego układu. Ze względu na postać prawych stron równań jako funkcję Lapunowa wybieramy funkcję $V(x, y) = x^2 + y^2$. Mamy wtedy

$$\frac{dV}{dt} = 2x(y-x+xy)+2y(x-y-x^2-y^3) = -x^2-y^2-y^4+2xy = -(x-y)^2-y^4.$$

Wynika stąd, że

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 0,$$

czyli rozwiązanie zerowe jest stabilne. Ponadto dla $(x, y) \neq (0, 0)$ mamy $\frac{dV}{dt} < 0$, więc rozwiązanie zerowe jest asymptotycznie stabilne.

5.2 Punkty krytyczne

Zadanie 5.7 Zbadać charakter punktów krytycznych układu

$$x' = x(y+1),$$
$$y' = -y(x+1).$$

Rozwiązanie:
Rozpoczynamy od znalezienia punktów krytycznych, czyli rozwiązania układu

$$x(y+1) = 0,$$
$$-y(x+1) = 0.$$

Układ ten ma dwa rozwiązania, czyli istnieją dwa punkty krytyczne $(0,0)$ i $(-1,-1)$. Aby zbadać charakter tych punktów dokonujemy linearyzacji układu. Linearyzacja wokół punktu $(0,0)$ daje układ liniowy

$$x' = \frac{\partial f_1}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(0,0)} x + \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(0,0)} y,$$
$$y' = \frac{\partial f_2}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(0,0)} x + \frac{\partial f_2}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(0,0)} y,$$

gdzie $f_1(x,y) = x(y+1)$ a $f_2(x,y) = -y(x+1)$. Po wykonaniu wskazanych różniczkowań dostajemy układ

$$x' = x,$$
$$y' = -y.$$

Punkt krytyczny $(0,0)$ dla tego układu liniowego jest siodłem. Ponieważ siodło jest punktem hiperbolicznym, to także dla układu nieliniowego punkt $(0,0)$ będzie siodłem.

Zbadamy teraz charakter punktu krytycznego $(-1,-1)$. Linearyzacja wokół tego punktu daje

$$x' = \frac{\partial f_1}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(-1,-1)} (x+1) + \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(-1,-1)} (y+1),$$
$$y' = \frac{\partial f_2}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(-1,-1)} (x+1) + \frac{\partial f_2}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(-1,-1)} (y+1),$$

Po wykonaniu różniczkowań dostajemy układ

$$x' = -(y+1),$$
$$y' = (x+1).$$

Punkt krytyczny $(-1,-1)$ dla tego układu liniowego jest środkiem. Ponieważ środek nie jest punktem hiperbolicznym, to nie możemy na podstawie analizy układu zlinearyzowanego wnioskować o charakterze punktu krytycznego układu nieliniowego.

Aby zbadać charakter punktu $(-1,-1)$ będziemy analizować układ nieliniowy. Zauważmy, że nasz układ jest równoważny następującemu równaniu

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(x+1)}{x(y+1)}.$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, które można łatwo scałkować

$$\frac{y+1}{y}dy = -\frac{x+1}{x}dx.$$

W wyniku dostajemy

$$y + \ln y = -x - \ln x + c,$$

czyli rozwiązanie ma postać $xye^x e^y = c$. Można zauważyć, że funkcja $F(x,y) = xye^x e^y$ ma minimum w punkcie $(-1,-1)$ a jej poziomice położone blisko tego minimum tworzą zamknięte krzywe. Oznacza to, że punkt $(-1,-1)$ także dla układu nieliniowego jest środkiem.

Zadanie 5.8 Zbadać charakter punktów krytycznych układu

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -x + x^3. \end{aligned}$$

Rozwiązanie:
Rozpoczynamy od znalezienia punktów krytycznych, czyli rozwiązania układu

$$\begin{aligned} &y = 0, \\ &-x + x^3 = 0. \end{aligned}$$

Układ ten ma 3 rozwiązania, czyli istnieją 3 punkty krytyczne $(0,0)$, $(1,0)$ i $(-1,0)$. Aby zbadać charakter tych punktów dokonujemy linearyzacji układu. Linearyzacja wokół punktu $(0,0)$ daje układ liniowy

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -x. \end{aligned}$$

Punkt krytyczny $(0,0)$ dla tego układu liniowego jest środkiem. Ponieważ środek nie jest punktem hiperbolicznym, to nie możemy na podstawie analizy układu zlinearyzowanego wnioskować o charakterze punktu krytycznego układu nieliniowego.

Zbadamy teraz charakter punktu krytycznego $(1,0)$. Linearyzacja wokół tego punktu daje

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= 2(x-1). \end{aligned}$$

Punkt krytyczny $(1,0)$ dla tego układu liniowego jest siodłem. Ponieważ siodło jest punktem hiperbolicznym, to także dla układu nieliniowego punkt $(0,0)$ będzie siodłem.

Zbadamy teraz charakter punktu krytycznego $(-1,0)$. Linearyzacja wokół tego punktu daje

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= 2(x+1). \end{aligned}$$

Punkt krytyczny $(-1,0)$ dla tego układu liniowego jest także siodłem. Ponieważ siodło jest punktem hiperbolicznym, to także dla układu nieliniowego punkt $(-1,0)$ będzie siodłem.

Aby zbadać charakter punktu $(0,0)$ będziemy analizować układ nieliniowy. Zauważmy, że nasz układ jest równoważny następującemu równaniu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - x}{y}.$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, które można łatwo scałkować

$$ydy = (x^3 - x)dx.$$

W wyniku dostajemy

$$x^2 - \frac{1}{2}x^4 + y^2 = c.$$

Funkcja $F(x,y) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + y^2 = x^2(1 - x^2/2) + y^2$ ma maksimum lokalne w punkcie $(0,0)$ a jej poziomice położone blisko tego maksimum tworzą zamknięte krzywe. Oznacza to, że punkt $(0,0)$ także dla układu nieliniowego jest środkiem.

Zadanie 5.9 Zbadać charakter punktów krytycznych układu

$$\begin{aligned} x' &= xy - 4, \\ y' &= (x-4)(y-x). \end{aligned}$$

Rozwiązanie:
Rozpoczynamy od znalezienia punktów krytycznych, czyli rozwiązania układu

$$\begin{aligned} xy - 4 &= 0, \\ (x-4)(y-x) &= 0. \end{aligned}$$

Układ ten ma 3 rozwiązania, czyli istnieją 3 punkty krytyczne $(2,2)$, $(-2,-2)$ i $(4,1)$. Aby zbadać charakter tych punktów dokonujemy linearyzacji układu. Linearyzacja wokół punktu $(2,2)$ daje układ liniowy

$$\begin{aligned} x' &= 2(x-2) + 2(y-2), \\ y' &= 2(x-2) - 2(y-2). \end{aligned}$$

Punkt krytyczny $(2, 2)$ dla tego układu liniowego jest siodłem. Ponieważ siodło jest punktem hiperbolicznym, to także dla układu nieliniowego punkt $(2, 2)$ będzie siodłem.

Zbadamy teraz charakter punktu krytycznego $(-2, -2)$. Linearyzacja wokół tego punktu daje

$$\begin{aligned} x' &= -2(x + 2) - 2(y + 2), \\ y' &= 6(x + 2) - 6(y + 2). \end{aligned}$$

Wielomian charakterystyczny dla tego układu ma postać $\lambda^2 + 8\lambda + 24 = 0$, a jego pierwiastkami są $\lambda_1 = -4 + 2\sqrt{2}i$ oraz $\lambda_2 = -4 - 2\sqrt{2}i$. Wynika stąd, że punkt krytyczny $(-2, -2)$ dla układu liniowego jest ogniskiem stabilnym. Ponieważ ognisko jest punktem hiperbolicznym, to dla układu nieliniowego punkt $(-2, -2)$ będzie stabilnym punktem krytycznym. Może być to zarówno ognisko stabilne jak węzeł stabilny (tw. Grobmana-Hartmana tego nie rozstrzyga).

Zbadamy teraz charakter punktu krytycznego $(4, 1)$. Linearyzacja wokół tego punktu daje

$$\begin{aligned} x' &= (x - 4) + 4(y - 1), \\ y' &= -3(x - 4). \end{aligned}$$

Wielomian charakterystyczny dla tego układu ma postać $\lambda^2 - \lambda + 12 = 0$, a jego pierwiastkami są $\lambda_1 = \frac{1}{2} + i\sqrt{47}$ oraz $\lambda_2 = \frac{1}{2} - i\sqrt{47}$. Wynika stąd, że punkt krytyczny $(4, 1)$ dla układu liniowego jest ogniskiem niestabilnym. Ponieważ ognisko jest punktem hiperbolicznym, to dla układu nieliniowego punkt $(4, 1)$ będzie niestabilnym punktem krytycznym. Może być to zarówno ognisko niestabilne jak węzeł niestabilny.

Zadanie 5.10 Zbadać charakter punktów krytycznych układu

$$\begin{aligned} x' &= 4x(y - 1), \\ y' &= y(x + x^2). \end{aligned}$$

Rozwiązanie:
Rozpoczynamy od znalezienia punktów krytycznych, czyli rozwiązania układu

$$\begin{aligned} 4x(y - 1) &= 0, \\ y(x + x^2) &= 0. \end{aligned}$$

Układ ten ma nietypowe rozwiązania. Jednym z rozwiązań jest punkt $(-1, 1)$, prócz tego rozwiązaniem jest cała prosta punktów o współrzędnych $(0, c)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$. Linearyzacja wokół punktu $(-1, 1)$ daje układ liniowy

$$\begin{aligned} x' &= -4(y - 1), \\ y' &= -(x + 1). \end{aligned}$$

Punkt krytyczny $(-1, 1)$ dla tego układu liniowego jest siodłem. Ponieważ siodło jest punktem hiperbolicznym, to także dla układu nieliniowego punkt $(-1, 1)$ będzie siodłem.

Zbadamy teraz charakter nieprostych punktów krytycznych $(0, c)$. Aby zbadać charakter tych punktów będziemy analizowali układ nieliniowy. Zauważmy, że nasz układ jest równoważny następującemu równaniu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x + x^2)}{4x(y - 1)}.$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, które można łatwo scałkować

$$\frac{y - 1}{y} dy = \frac{x + x^2}{4x} dx.$$

W wyniku całkowania dostajemy

$$y - \ln y = \frac{1}{4}(x + \frac{1}{2}x^2) + c, \quad \text{czyli } ye^{-y+(x+1)^2/8} = c$$

Funkcja $ye^{-y+(x+1)^2/8} = c$ wyznacza w otoczeniu punktu $(0, y)$ kształt krzywych całkowych. Analizując pochodne x' oraz y' w otoczeniu takich punktów zauważamy, że dla $x > 0$ i $y > 1$ trajektorie odchodzą od prostej $x = 0$, dla $x > 0$ i $y < 1$ trajektorie zbliżają się do prostej $x = 0$. Dla $x < 0$ zachowanie jest analogiczne, gdy $y > 1$ trajektorie odchodzą od prostej $x = 0$ a dla $y < 1$ trajektorie zbliżają się do prostej $x = 0$. Wynika stąd, że także dla układu nieliniowego punkty $(0, c)$ są nieprostymi punktami krytycznymi.

Mathematica jest bardzo pomocna przy znajdowaniu portretów fazowych dla układów równań różniczkowych. Przede wszystkim mamy do dyspozycji polecenie `VectorPlot`, które daje obraz pola wektorowego układu 2×2 (jest też polecenie `VectorPlot3D`, które tworzy trójwymiarowe pola wektorowe, ale takich przykładów nie będziemy rozpatrywali). Mamy także kilka poleceń tworzących wykresy rozwiązań: `ParametricPlot` – dla rozwiązań podanych w formie parametrycznej jako para funkcji $(x(t), y(t))$, `ContourPlot` – dla rozwiązań podanych w postaci funkcji dwu zmiennych $f(x, y)$ oraz rozwiązań podanych przez równanie $f(x, y) = 0$. Przede wszystkim dysponujemy poleceniem `StreamPlot`, które tworzy portret fazowy dla układu dwuwymiarowego. W przykładowych zadaniach będziemy się najczęściej posługiwali tym ostatnim poleceniem. Pokażemy jednak także przykłady, jak można znaleźć portret fazowy wykorzystując bezpośrednio polecenia tworzenia rysunków krzywych fazowych z otrzymanych rozwiązań.

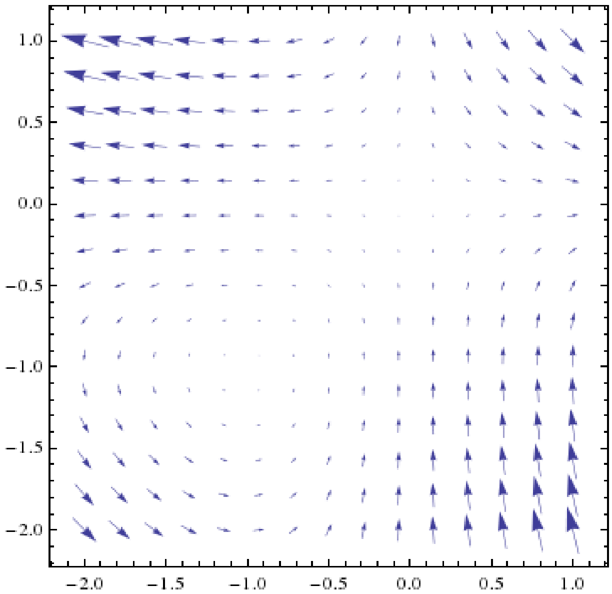
Zadanie 5.11 Narysować portret fazowy dla układu

$$\begin{aligned} x' &= x(y + 1), \\ y' &= -y(x + 1). \end{aligned}$$

Rozwiązanie:
To jest układ z zadania 5.7, którego punktami krytycznymi są $(0,0)$ i $(-1,-1)$. Z zadania 5.7 wiemy, że punkt $(0,0)$ jest siodłem a punkt $(-1,-1)$ środkiem. Rozpocznijmy od narysowania pola wektorowego tego równania.

```
VectorPlot[{x*(y+1),-y*(x+1)},{x,-2,1},{y,-2,1}]
```

W wyniku otrzymujemy pole wektorowe pokazane na Rys. 5.1



Rysunek 5.1: Pole wektorowe dla równania z Zadania 5.11

Znając postać pola wektorowego oraz domyślając się na tej podstawie przebiegu krzywych całkowych możemy scałkować nasz układ numerycznie z odpowiednimi warunkami początkowymi a następnie narysować otrzymane krzywe całkowe. Można jednak otrzymać postać krzywych fazowych wykonując polecenie `StreamPlot`

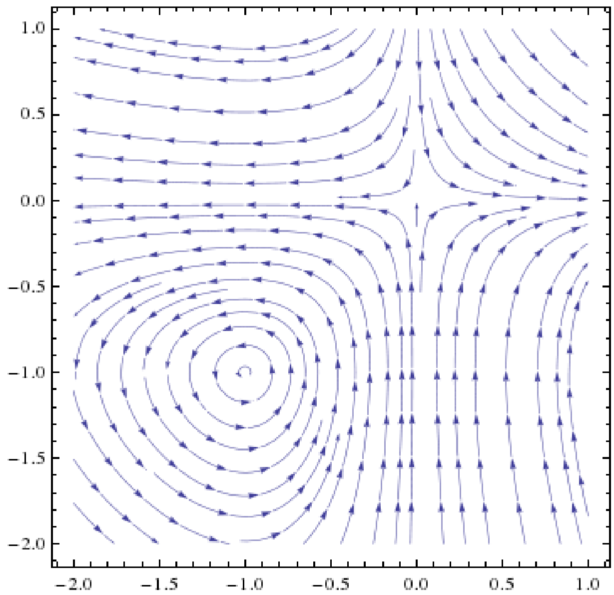
```
StreamPlot[{x*(y+1),-y*(x+1)},{x,-2,1},{y,-2,1}]
```

W wyniku otrzymujemy portret fazowy pokazany na Rys. 5.2

Zadanie 5.12 Narysować portret fazowy dla układu

$$x' = y,$$
$$y' = -x + x^3.$$

Rozwiązanie:



Rysunek 5.2: Zadanie 5.11. Portret fazowy otrzymany poleceniem `StreamPlot`

To jest układ z zadania 5.8, którego punktami krytycznymi są punkty $(0,0)$, $(1,0)$ i $(-1,0)$. Z zadania 5.8 wiemy, że punkty $(1,0)$ i $(-1,0)$ są siodłami a punkt $(0,0)$ jest środkiem. Rozpocznijmy od narysowania pola wektorowego tego równania

```
VectorPlot[{y,-x+x^3},{x,-2,2},{y,-2,2}]
```

W wyniku otrzymujemy pole wektorowe pokazane na Rys.5.3

Znając postać pola wektorowego oraz domyślając się przebiegu krzywych całkowych możemy chcieć scałkować ten układ numerycznie z odpowiednimi warunkami początkowymi a następnie narysować otrzymane krzywe całkowe. Z kształtu pola wektorowego widać jednak, że jeśli nie chcemy rozłożyć naszego całkowania na bardzo wiele szczególnych przypadków, to trudno jest dotrzeć do otoczenia punktu $(0,0)$.

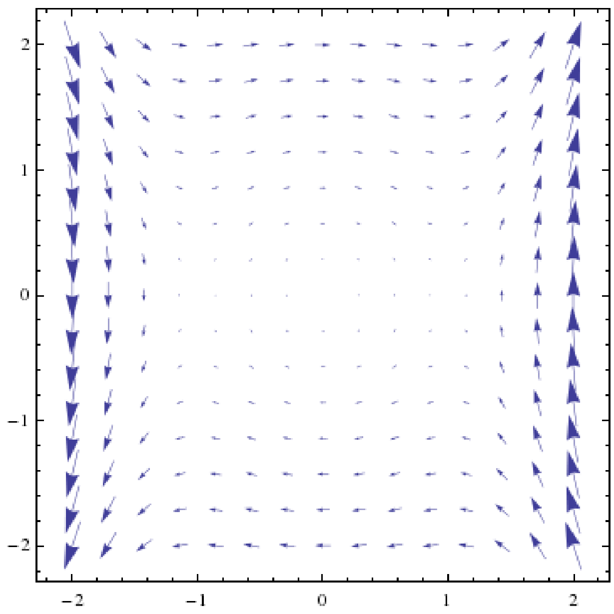
Ponieważ w zadaniu 5.8 otrzymaliśmy rozwiązanie w postaci funkcji uwikłanej $F(x,y) = x^2 - x^4/2 + y^2 = c$, to możemy narysować portret fazowy wykorzystując polecenie `ContourPlot`.

```
ContourPlot[x^2-x^4/2+y^2,{x,-2,2},{y,-2,2},
              Contours->40,
              ContourShading->False,ContourStyle->Black]
```

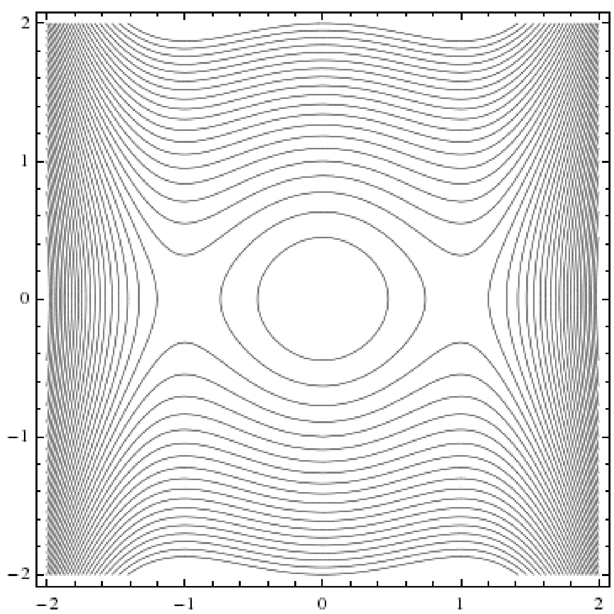
W wyniku otrzymujemy obraz krzywych całkowych pokazany na Rys. 5.4.

Na koniec zobaczmy, jak wygląda portret fazowy otrzymany w wyniku wykonania polecenia `StreamPlot`.

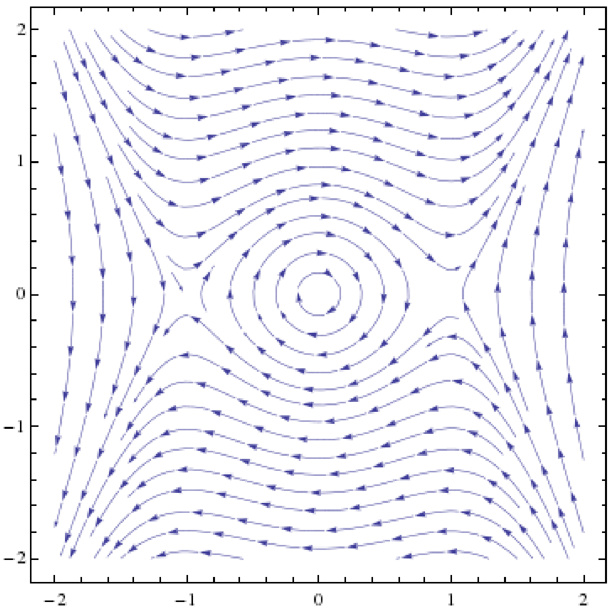
```
StreamPlot[{y,-x+x^3},{x,-2,2},{y,-2,2}]
```



Rysunek 5.3: Pole wektorowe dla równania z Zadania 5.12



Rysunek 5.4: Zadanie 5.12. Portret fazowy otrzymany poleceniem `ContourPlot`



Rysunek 5.5: Zadanie 5.12. Portret fazowy otrzymany poleceniem `StreamPlot`

W wyniku otrzymujemy portret fazowy pokazany na Rys.5.5.

Zadanie 5.13 Naszkicować portret fazowy dla układu

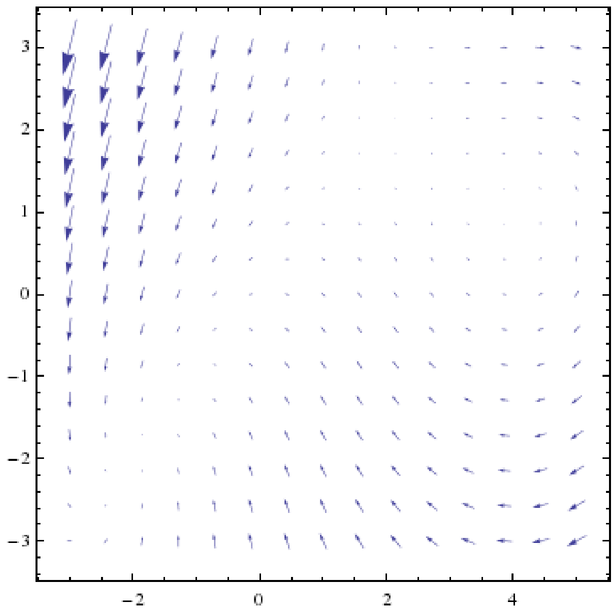
$$x' = xy - 4,$$
$$y' = (x-4)(y-x).$$

Rozwiązanie:
To jest układ z zadania 5.9, którego punktami krytycznymi są $(2,2)$, $(-2,-2)$ i $(4,1)$. Z zadania 5.9 wiemy, że punkt $(2,2)$ jest siodłem, punkt $(-2,-2)$ punktem krytycznym stabilnym a punkt $(4,1)$ punktem krytycznym niestabilnym. Z analizy układu zlinearyzowanego nie umiemy określić dokładniej charakteru tych dwóch ostatnich punktów krytycznych. Rozpocznijmy od narysowania pola wektorowego tego równania.

```
VectorPlot[{x*y-4,(x-4)*(y-x)},{x,-3,5},{y,-3,3},
            VectorPoints->15]
```

W wyniku otrzymujemy pole wektorowe pokazane na Rys.5.6

Z kształtu pola wektorowego widać, że numeryczne całkowanie tego równania będzie wymagało podzielenia obszaru całkowania na kilka odrębnych obszarów. Z drugiej strony, interesujące jest przede wszystkim zachowanie krzywych fazowych w otoczeniu punktów krytycznych $(-2,-2)$ i $(4,1)$. Aby zbadać krzywe całkowe w otoczeniu punktu $(4,1)$ możemy rozważyć krzywe startujące z punktów $(x,1)$,



Rysunek 5.6: Pole wektorowe dla równania z Zadania 5.13

dla $x \in [4.01, 4.46]$. Odpowiednią analizę wykonamy oczywiście przy pomocy programu *Mathematica*.

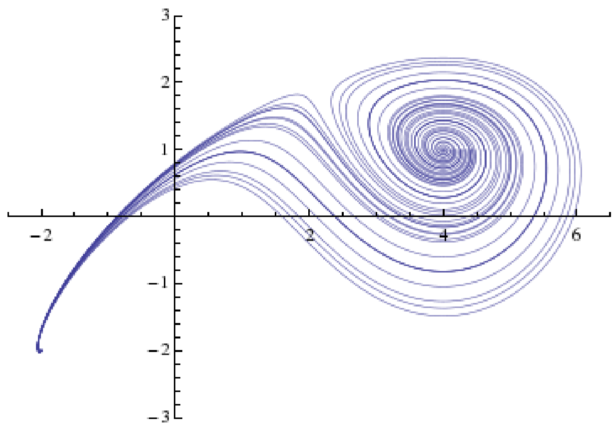
Rozpoczynamy od zdefiniowania procedury, która będzie znajdowała rozwiązania numeryczne dla różnych warunków początkowych oraz tworzyła wykresy tych rozwiązań.

```
solutiona[s_]:=Module[{solt,x,y,t},
   eqone=x'[t]==x[t]*y[t]-4;
   eqtwo=y'[t]==(x[t]-4)*(y[t]-x[t]);
   solt=NDSolve[{eqone,eqtwo,
        x[0]== s,y[0]==1},
        {x[t],y[t]},{t,0,20}];
  ParametricPlot[{x[t],y[t]}/.solt,
  {t,0,20}, Compiled->False,
  PlotRange->{{-2.5,6.5},{-3,3}}]]
```

Następnie tworzymy odpowiednią tablicę wyników i rysujemy wykres (Rys. 5.7).

```
grapha =Table[solutiona[s],{s,4.01,4.46,0.03}];
Show[grapha,
     DisplayFunction->$DisplayFunction]
```

Z otrzymanego wykresu widać już wyraźnie, jak zachowują się krzywe całkowe startujące z otoczenia punktu niestabilnego $(4, 1)$. W szczególności jest jasne, że



Rysunek 5.7: Zadanie 5.14. Portret fazowy – rozwiązanie parametryczne

także dla układu nieliniowego punkt $(4, 1)$ jest niestabilnym ogniskiem. Na podstawie tego wykresu wydaje się także, że punkt stabilny $(-2-2)$ jest stabilnym ogniskiem. Aby potwierdzić to przypuszczenie narysujemy portret fazowy otoczenia punktu $(-2, -2)$ w powiększeniu modyfikując wyświetlany obszar oraz warunki początkowe w funkcji `solutiona`. Modyfikacje te mają postać

```
x[0]== -2.05,y[0]==s
PlotRange->{{-2.1,-1.9},{-2.1,-1.9}}
```

Modyfikujemy także obszar zmienności parametru s

```
grapha =Table[solutiona[s],{s,-1.9,-2.1,0.01}];
```

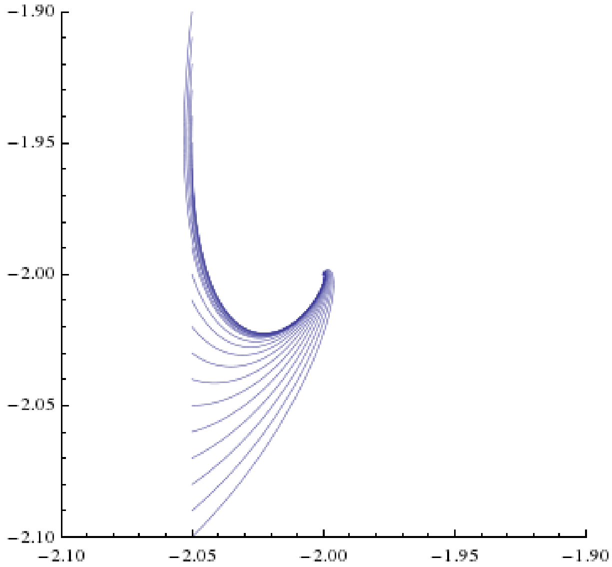
W wyniku otrzymujemy portret fazowy pokazany na Rys. 5.8. Z tego rysunku widać, że punkt $(-2, 2)$ jest rzeczywiście stabilnym ogniskiem.

Zadanie 5.14 Naszkicować portret fazowy dla układu

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{1}{3}x^3 - y, \\ y' &= x - 3y + 1. \end{aligned}$$

Rozwiązanie:
To zadanie rozwiążemy od początku wykorzystując program *Mathematica*. Poszczególne polecenia programu *Mathematica* będą oddzielane komentarzami, ale należy je traktować, tak jakby były kolejno wpisywane do programu. W szczególności oznacza to, że zdefiniowane zmienne zachowują swoje wcześniejsze wartości przy kolejnych operacjach.

Rozpoczniemy od poszukiwania punktów krytycznych.



Rysunek 5.8: Zadanie 5.13. Portret fazowy w otoczeniu punktu $(-2,-2)$

```
f[x_,y_]=x-x^3/3-y;
g[x_,y_]=x-3*y+1;
roots=Solve[{f[x,y]==0,g[x,y]==0}]
```

W wyniku wykonania tego polecenia otrzymujemy punkty krytyczne $(1,2/3)$, $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{3+3\sqrt{5}}{18})$ i $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{3-3\sqrt{5}}{18})$. Aby zbadać charakter tych punktów krytycznych dokonujemy linearyzacji układu.

```
linmatrix={{D[f[x,y],x],D[f[x,y],y]},
           {D[g[x,y],x],D[g[x,y],y]}};
MatrixForm[linmatrix]
```

W wyniku dostajemy macierz układu zlinearyzowanego

$$\begin{matrix} 1-x^2 & -1 \\ 1 & -3 \end{matrix}$$

Obecnie możemy zbadać charakter każdego punktu krytycznego.

```
e1=Eigenvalues[linmatrix/.roots[[1]]]
```

W wyniku otrzymujemy wartości własne macierzy odpowiadajace punktowi krytycznemu $(1,2/3)$. Wartościami tymi są $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ oraz $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$. Ponieważ obie wartości własne są ujemne oznacza to, że punkt $(1,2/3)$ jest stabilnym punktem krytycznym.

```
e2=Eigenvalues[linmatrix/.roots[[2]]]
```

W wyniku otrzymujemy wartości własne macierzy odpowiadajace punktowi krytycznemu $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+3\sqrt{5}}{18})$. Wartościami tymi są

$$\frac{-7+\sqrt{5}+\sqrt{1+\sqrt{5}}\sqrt{9+\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{-7+\sqrt{5}-\sqrt{1+\sqrt{5}}\sqrt{9+\sqrt{5}}}{4}.$$

Policzenie przybliżonych wartości liczbowych tych wartości własnych pokazuje, że jedna z nich jest dodatnia a druga ujemna. Oznacza to, że punkt $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+3\sqrt{5}}{18})$ jest siodłem.

```
e3=Eigenvalues[linmatrix/.roots[[3]]]
```

W wyniku otrzymujemy wartości własne macierzy odpowiadajace punktowi krytycznemu $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-3\sqrt{5}}{18})$. Wartościami tymi są

$$\frac{-7+\sqrt{5}+\sqrt{-1+\sqrt{5}}\sqrt{-9+\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{-7+\sqrt{5}-\sqrt{-1+\sqrt{5}}\sqrt{-9+\sqrt{5}}}{4}.$$

Policzenie przybliżonych wartości liczbowych tych wartości własnych pokazuje, że są to liczby zespolone z ujemną częścią rzeczywistą. Oznacza to, że punkt $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-3\sqrt{5}}{18})$ jest stabilnym punktem krytycznym.

Znalezienie portretu fazowego jest możliwe jedynie przez numeryczne obliczenie krzywych całkowych. Definiujemy procedurę, która będzie znajdowała rozwiązania numeryczne dla różnych warunków początkowych oraz tworzyła wykresy tych rozwiązań.

```
solutionb[s_]:=Module[{solt,x,y,t},
   eqone=x'[t]==x[t]-x[t]^3/3-y[t];
   eqtwo=y'[t]==x[t]-3*y[t]+1;
   solt=NDSolve[{eqone,eqtwo,
        x[0]==s*Cos[20*s]+0.8,
        y[0]==2*Sin[40*s*Pi -Pi/2]},
        {x[t],y[t]},{t,0,20}];
  ParametricPlot[{x[t],y[t]}/.solt,
  {t,0,20}, Compiled->False,
  PlotRange->{{-3,3},{-3,3}}]]
```

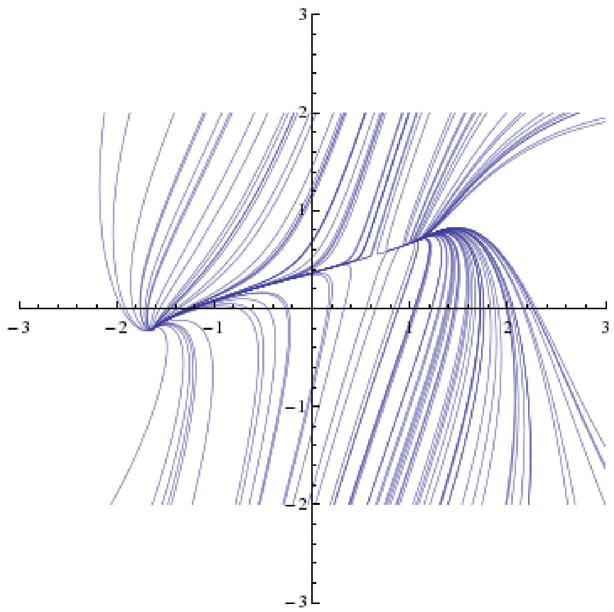
Następnie tworzymy odpowiednią tablicę wyników oraz rysunek (Rys. 5.9).

```
graphb=Table[solutionb[s],{s,0.1,3,0.025}];
Show[graphb,
     DisplayFunction->$DisplayFunction]
```

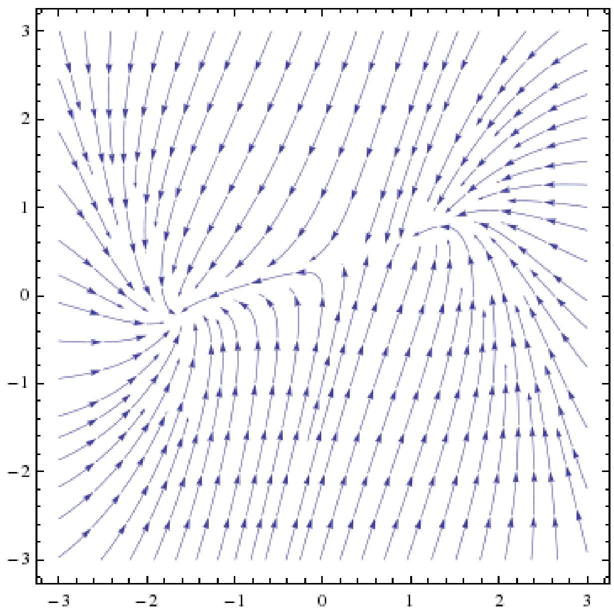
Jak widać rysunek ten nie jest bardzo czytelny. Podobnie jest z portretem fazowym otrzymanym przy pomocy polecenia `StreamPlot` pokazanym na Rys. 5.10.

```
StreamPlot[{x* x^3/3-y,x-3*y+1},{x,-3,3},{y,-3,3}]
```

Widać z tych rysunków, że bez znajomości charakteru poszczególnych punktów krytycznych trudno byłoby je poprawnie zinterpretować.



Rysunek 5.9: Portret fazowy dla równania z Zadania 5.14



Rysunek 5.10: Zadanie 5.14. Portret fazowy otrzymany poleceniem `StreamPlot`

5.3 Całki pierwsze

Zadanie 5.15 Znaleźć całki pierwsze dla układu równań

$$x' = \frac{x}{2x-y},$$
$$y' = \frac{y}{2x-y}.$$

Rozwiązanie:
Zauważamy, że układ można zamienić na jedno równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Całkowanie tego równania daje rozwiązanie $y = cx$, co można zapisać w postaci $\frac{y}{x} = c$. Ostatnie równanie opisuje nam rodzinę całek pierwszych dla naszego układu.

Zadanie 5.16 Znaleźć całki pierwsze dla układu równań

$$x' = \frac{y(y-x)}{t(x+y)},$$
$$y' = \frac{x(x-y)}{t(x+y)}.$$

Rozwiązanie:
Ten układ też można zamienić na jedno równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Całkowanie tego równania daje rozwiązanie $xy = c$. Równanie to opisuje nam rodzinę całek pierwszych dla naszego układu.

Zadanie 5.17 Znaleźć całki pierwsze dla układu równań

$$x' = -\frac{\ln t}{2x},$$
$$y' = \frac{\ln t - 2x}{2x}.$$

Rozwiązanie:
Ponieważ prawe strony równań zależą od t, musimy poszukiwać całki pierwszej zależnej od czasu. Jeśli $U(t, x, y)$ jest całką pierwszą, to funkcja ta spełnia równanie

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\ln t}{2x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\ln t - 2x}{2x} = 0. \tag{5.1}$$

Jest to równanie o pochodnych cząstkowych i jego rozwiązanie wydaje się być trudniejsze niż rozwiązanie wyjściowego układu równań zwyczajnych. Stwierdzenie to jest w ogólności prawdziwe, ale w pewnych przypadkach rozwiązanie równania (5.1) nie jest takie trudne.

Pierwszą obserwacją jaką uczynimy jest związek między równaniem (5.1) a wyjściowym układem równań zwyczajnych. Równanie (5.1) opisuje pewną hiperpowierzchnię zależną od 3 zmiennych (t, x, y). Rozważmy na tej powierzchni krzywą parametryzowaną paramatrem s. Równanie tej krzywej ma formę układu równań zwyczajnych

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= f_0(t, x, y), \\ \frac{dx}{ds} &= f_1(t, x, y), \\ \frac{dy}{ds} &= f_2(t, x, y). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Jeśli prawe strony tych równań wyznaczymy z naszego wyjściowego układu

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= 1, \\ \frac{dx}{ds} &= -\frac{\ln s}{2x}, \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{\ln s - 2x}{2x}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

to wstawiając je do równania (5.1) otrzymamy równanie

$$\frac{dU}{ds} = 0.$$

Oznacza to, że powierzchnię $U(t, x, y)$ można ”utkać” z krzywych całkowych układu (5.3). To spostrzeżenie nie posuwa nas specjalnie do przodu, bo w dalszym ciągu musimy rozwiązać układ równań identyczny z wyjściowym (dokonaliśmy tylko ”zmiany nazwy” zmiennej t na s).

Rozwiązania problemu możemy jednak poszukiwać inaczej. Cofnijmy się do ogólnego układu (5.2). Wyobraźmy sobie, że znaleźliśmy takie współczynniki λ_0, λ_1 i λ_2 (nie koniecznie stałe), że

$$\lambda_0 f_0(t, x, y) + \lambda_1 f_1(t, x, y) + \lambda_2 f_2(t, x, y) = 0 \tag{5.4}$$

i jednocześnie

$$\lambda_0 \frac{dt}{ds} + \lambda_1 \frac{dx}{ds} + \lambda_2 \frac{dy}{ds} = \frac{\lambda_0 dt + \lambda_1 dx + \lambda_2 dy}{ds} = \frac{dG(t, x, y)}{ds}. \tag{5.5}$$

Z równań (5.4) i (5.5) wynika oczywiście, że $\frac{dG(t,x,y)}{ds} = 0$, czyli $G(t, x, y) = U(t, x, y) + c$. Oznacza to, że znaleźliśmy całkę pierwszą.

Znalezienie współczynników λ_0, λ_1 i λ_2 nie jest łatwe. Pomocne przy znajdowaniu właściwej kombinacji może być zapisanie układu (5.2) w postaci symetrycznej

$$\frac{dt}{f_0(t,x,y)} = \frac{dx}{f_1(t,x,y)} = \frac{dy}{f_2(t,x,y)}. \tag{5.6}$$

Można wtedy zauważyć, że pewne pary równości nie zależą od trzeciej zmiennej, co pozwala znaleźć funkcję G jako funkcję jedynie dwóch zmiennych. Symetryczny zapis układu równań może też ułatwić zgadnięcie dobrej kombinacji współczynników.

Pokażemy poniżej realizację takich możliwości dla naszego wyjściowego układu. W tym celu zapisze układ w postaci symetrycznej (5.6).

$$\frac{dt}{2x} = \frac{dx}{-\ln t} = \frac{dy}{\ln t - 2x}.$$

Łatwo zauważyć, że biorąc równość pierwszych dwóch ułamków dostajemy całkowalny układ

$$\frac{dt}{2x} = \frac{dx}{-\ln t}, \quad \text{czyli} \quad 2xdx = -\ln t dt.$$

Całkowanie tego układu daje całkę pierwszą

$$U_1(t,x) \equiv t(\ln t - 1) + x^2 = c.$$

Drugą całkę pierwszą można otrzymać zauważając, że kombinacja ze współczynnikami 1 daje

$$1 \cdot (2x) + 1 \cdot (-\ln t) + 1 \cdot (\ln t - 2x) = 0.$$

Z drugiej strony

$$1 \cdot dt + 1 \cdot dx + 1 \cdot dy = d(t + x + y).$$

Oznacza to, że funkcja

$$U_2(t,x,y) \equiv t + x + y = c$$

jest drugą całką pierwszą.

Zadanie 5.18 Znaleźć całki pierwsze dla układu równań

$$x' = \frac{5t - 3y}{4y - 5x},$$
$$y' = \frac{3x - 4t}{4y - 5x}.$$

Rozwiązanie:
Ponieważ prawe strony równań zależą od t, musimy poszukiwać całki pierwszej zależnej od czasu. W tym celu zapisze układ w postaci symetrycznej

$$\frac{dt}{4y - 5x} = \frac{dx}{5t - 3y} = \frac{dy}{3x - 4t}.$$

Łatwo zauważyć, że kombinacja ze współczynnikami 3, 4, 5 daje

$$3 \cdot (4y - 5x) + 4 \cdot (5t - 3y) + 5 \cdot (3x - 4t) = 0.$$

Z drugiej strony

$$3 \cdot dt + 4 \cdot dx + 5 \cdot dy = d(3t + 4x + 5y).$$

Oznacza to, że funkcja

$$U_1(t, x, y) \equiv 3t + 4x + 5y = c$$

jest całką pierwszą.

Aby znaleźć drugą całkę pierwszą zauważmy, że kombinacja ze współczynnikami $2t$, $2x$ i $2y$ daje

$$2t \cdot (4y - 5x) + 2x \cdot (5t - 3y) + 2y \cdot (3x - 4t) = 0.$$

Z drugiej strony

$$2t \cdot dt + 2x \cdot dx + 2y \cdot dy = d(t^2 + x^2 + y^2).$$

Oznacza to, że funkcja

$$U_2(t, x, y) \equiv t^2 + x^2 + y^2 = c$$

jest drugą całką pierwszą.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 5.19 Udowodnić twierdzenie, nazywane *twierdzeniem Lapunowa o niestabilności*.
Niech dana będzie funkcja $V(x)$ klasy C^1 w pewnym zbiorze Q, będącym otoczeniem początku układu współrzędnych. Jeśli funkcja $V(x)$ spełnia warunki:

1) $V(0) = 0$,

2) dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje x, taki że $|x| < \varepsilon$ i $V(x) > 0$,

3) $\operatorname{grad} V \cdot f > 0$ dla $x \in Q \setminus \{0\}$,

to rozwiązanie zerowe równania autonomicznego $x' = f(x)$ nie jest stabilne w sensie Lapunowa.

Zadanie 5.20 Udowodnić, że rozwiązanie równania

$$x' = a(t)x,$$

gdzie $a(t)$ jest funkcją ciągłą, jest stabilne w sensie Lapunowa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\limsup_{t \to +\infty} \int_0^t a(s)ds < +\infty.$$

Zadanie 5.21 Zbadać stabilność lub brak stabilności rozwiązania zerowego układów równań:

a) $\begin{cases} x_1' = x_1^3 - x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2^3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1' = 2x_2^3 - x_1^5 \\ x_2' = -x_1 - x_2^3 + x_2^5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1' = x_1 x_2 - x_1^3 + x_2^3 \\ x_2' = x_1^2 - x_2^3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1' = 2x_2 - x_1 - x_2^3 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1' = -x_1 - x_1 x_2 \\ x_2' = x_2^3 - x_1^3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 - x_1 x_2^2 \\ x_2' = 2x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x_1' = x_1^5 + x_2^3 \\ x_2' = x_1^3 - x_2^5 \end{cases}$

Zadanie 5.22 W poniższych układach punkt $(0, 0)$ jest punktem krytycznym podanych układów równań. Dokonać klasyfikacji tego punktu.

a) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 4x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1' = 2x_2 - 3x_1 \\ x_2' = x_1 - 4x_2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1' = 2x_2 - 3x_1 \\ x_2' = x_2 - 2x_1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1' = -2x_1 - 5x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 2x_2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 4x_2 - 6x_1 \end{cases}$

Zadanie 5.23 W poniższych układach równań znaleźć punkty krytyczne, dokonać ich klasyfikacji oraz naszkicować lokalne portrety fazowe.

a) $\begin{cases} x_1' = 2x_1x_2 - 4x_2 - 8 \\ x_2' = 4x_2^2 - x_1^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1^2 + x_2^2 - 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1' = (2x_1 - x_2)(x_1 - 2) \\ x_2' = x_1x_2 - 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1' = \sqrt{x_1^2 - x_2 + 2} - 2 \\ x_2' = \operatorname{arc\,tg}(x_1^2 + x_1x_2) \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1' = \ln \dfrac{x_2^2 - x_2 + 1}{3} \\ x_2' = x_1^2 - x_2^2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1' = \ln(1 - x_2 + x_2^2) \\ x_2' = 3 - \sqrt{x_1^2 + 8x_2} \end{cases}$

Zadanie 5.24 W poniższych układach naszkicować lokalny portret fazowy w otoczeniu punktu osobliwego (punkty te nie są prostymi punktami osobliwymi).

a) $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1x_2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_2 \\ x_2' = x_2^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_2 \\ x_2' = 2x_1x_2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1' = x_2 - x_1^2 \\ x_2' = x_1x_2 \end{cases}$

Zadanie 5.25 Udowodnić, że jeśli równanie

$$(ax + by)dx + (mx + ny)dy = 0$$

nie jest w postaci różniczki zupełnej, ale ma czynnik całkujący, który jest funkcją ciągłą w otoczeniu punktu $(0, 0)$, to punkt ten jest siodłem.

Zadanie 5.26 Zbadać, czy podane funkcje są całkami pierwszymi wskazanych układów równań:

a) $\begin{cases} x_1' = x_1^2 x_2^{-1} \\ x_2' = x_2 - x_1 \end{cases} \qquad \varphi = x_1x_2e^{-t}$

b) $\begin{cases} x_1' = e^{-x_1}t^{-1} \\ x_2' = x_1e^{-x_2}t^{-1} \end{cases} \qquad \varphi = (1 + x_1)e^{-x_1} - e^{-x_2}$

c) $\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_2 + t}{x_1 + x_2} \\ x_2' = \dfrac{x_1 - t}{x_1 + x_2} \end{cases}$ $\qquad \varphi_1 = x_1 + x_2 - t, \quad \varphi_2 = x_1 + x_2 + t$

d) $\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_1^2 - t}{x_2} \\ x_2' = -x_1 \end{cases}$ $\qquad \varphi_1 = t^2 + 2x_1x_2, \quad \varphi_2 = x_1^2 - tx_2$

Zadanie 5.27 Znaleźć całki pierwsze układów równań:

a) $\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_1}{2x_1 - x_2} \\ x_2' = \dfrac{x_2}{2x_1 - x_2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1' = \dfrac{t + x_2}{x_1 + x_2} \\ x_2' = \dfrac{t + x_1}{x_1 + x_2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1' = t \\ x_2' = \dfrac{x_1}{x_2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_2(x_2 - x_1)}{t(x_1 + x_2)} \\ x_2' = \dfrac{x_1(x_1 - x_2)}{t(x_1 + x_2)} \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_1(x_1 - t)}{t(x_2 - x_1)} \\ x_2' = \dfrac{x_1^2 - tx_2}{t(x_2 - x_1)} \end{cases}$